

第4章 数字信号的基带传输

主要内容:

- 基带信号波形和频谱
- 基带信号的常用码型
- 奈奎斯特第一准则
- 奈奎斯特第二准则——部分响应系统
- 时域均衡的基本概念
- 抗噪声性能的分析方法

重点:

- 基带信号的频谱特征
- 常用码型编码的规则奈奎斯特准则的应用
- 时域均衡器

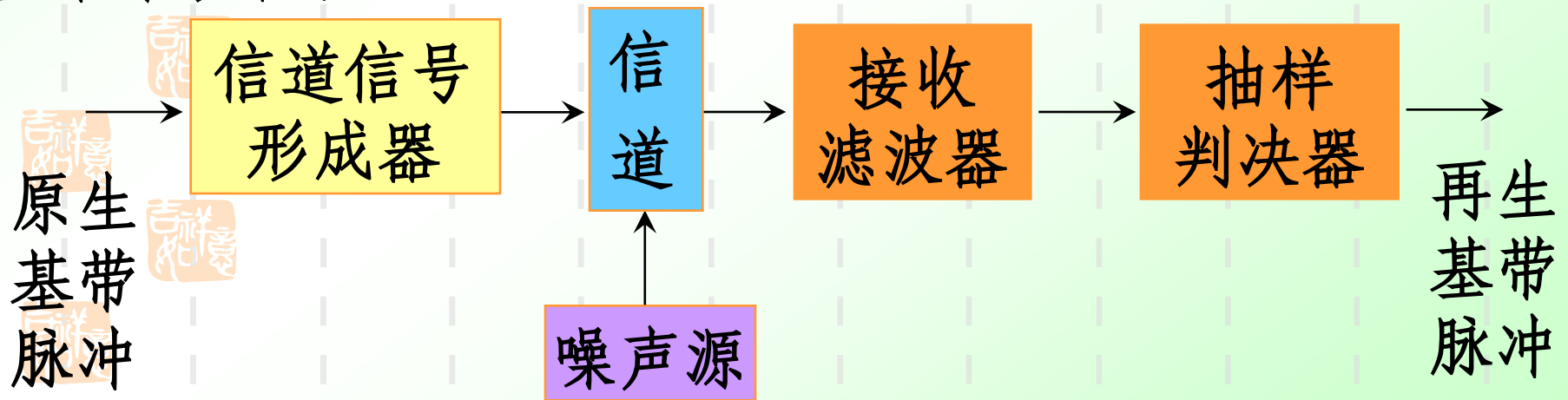
基带信号定义：未经调制的数字信号。

基带传输系统：不使用载波调制解调而直接传送基带信号的通信系统。

频带传输系统：

如果把调制解调部分看作是广义信道的一部分，则任何数字传输系统均可等效为基带传输系统。所以在本章中讨论的基带信号传输的基本原则同样适用于频带传输。

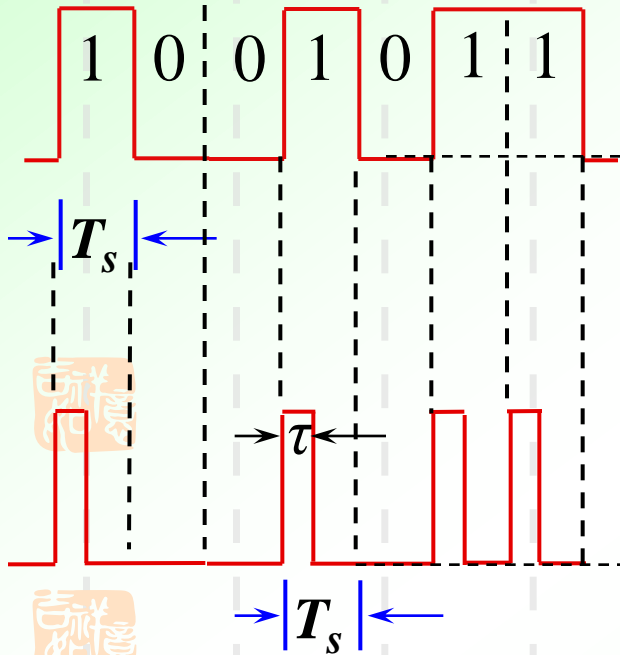
基带系统框图：



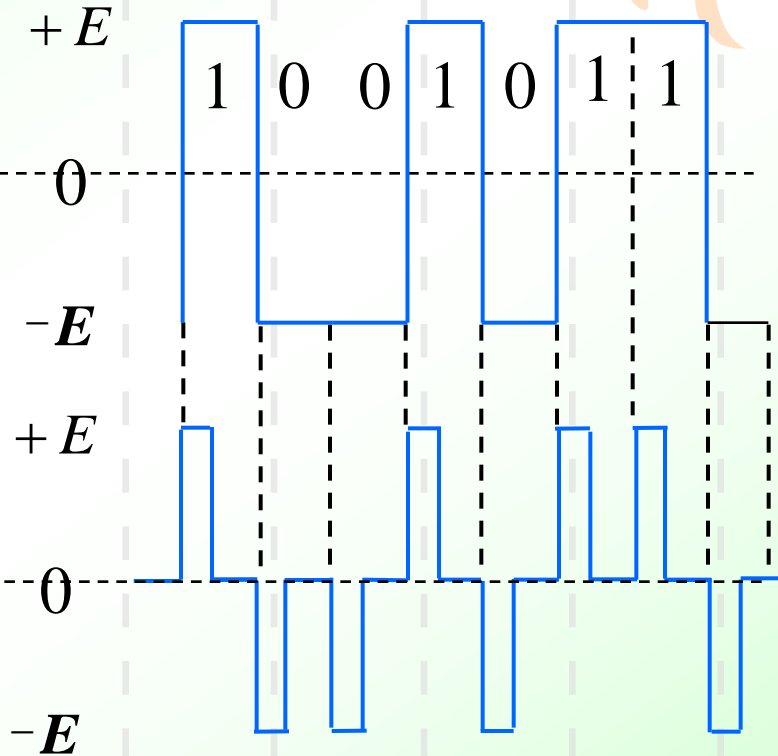
4.1 数字基带信号及其频谱特性

4.1.1 基带信号波形 (电气特征)

单极性不归零(NRZ)



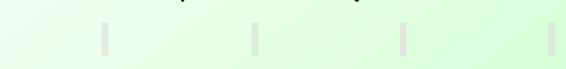
双极性不归零(NRZ-L)



单极性归零(RZ)



双极性归零(RZ-L)



T_s : 码元宽度; τ : 脉冲宽度



不归零和归零信号的码元宽度相同，但脉冲宽度 τ 不同，导致信号频谱不同。

$$\text{占空比} = \frac{\text{脉冲宽度}}{\text{码元宽度}} = \frac{\tau}{T_s}$$

归零信号的占空比通常为1/2，称为半占空码；不归零信号的占空比为1。

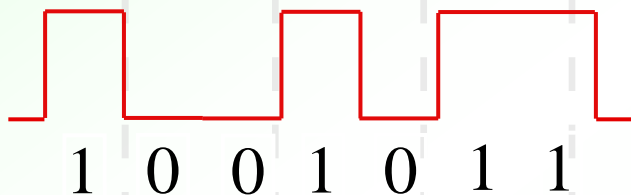


差分波形

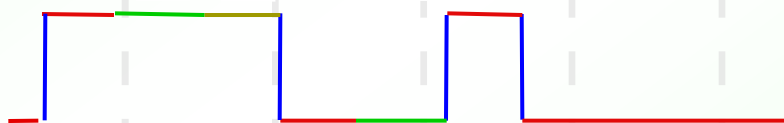
不是用码元的电平的高低来表示数字，而是用相邻码元电平的变化来表示数字符号。

规则：“1” —— 相邻码元电平值 **跳变**
“0” —— 相邻码元电平值 **保持不变**

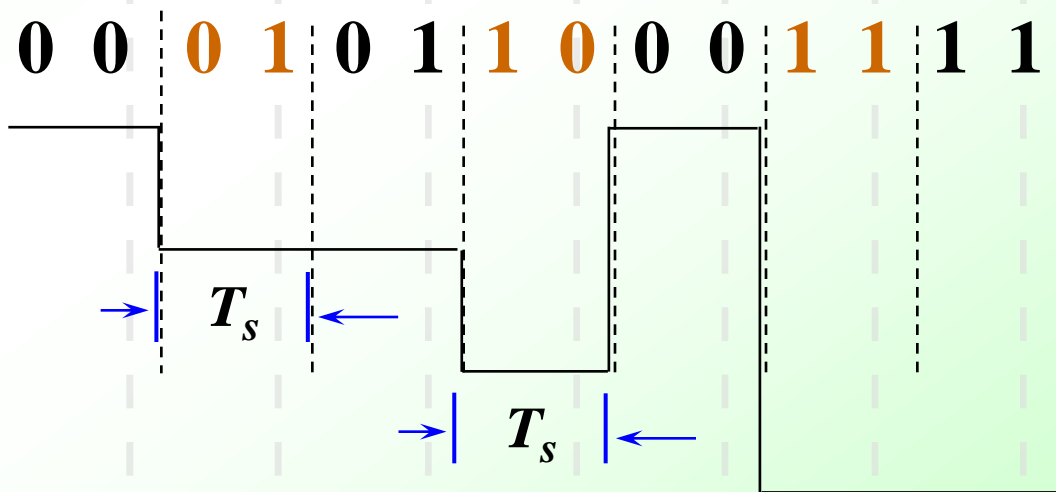
原始波形



差分波形



多值波形



4.1.2 基带信号的数学表达式

由于二进制数字基带信号是随机脉冲信号，且码元波形可任意，需采用随机信号分析法。

设 码元宽度为 T_s ，则基带信号 $S(t)$ 可表示成

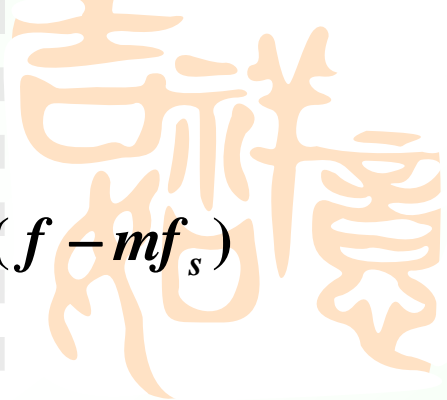
$$S(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_n(t)$$

$$\text{其中: } S_n(t) = \begin{cases} g_1(t-nT_s) & \text{以概率 } p \\ g_2(t-nT_s) & \text{以概率 } (1-p) \end{cases}$$

$g_1(t-nT_s)$ 、 $g_2(t-nT_s)$ 分别表示二进制两个状态的波形函数

0 1 0 0 1

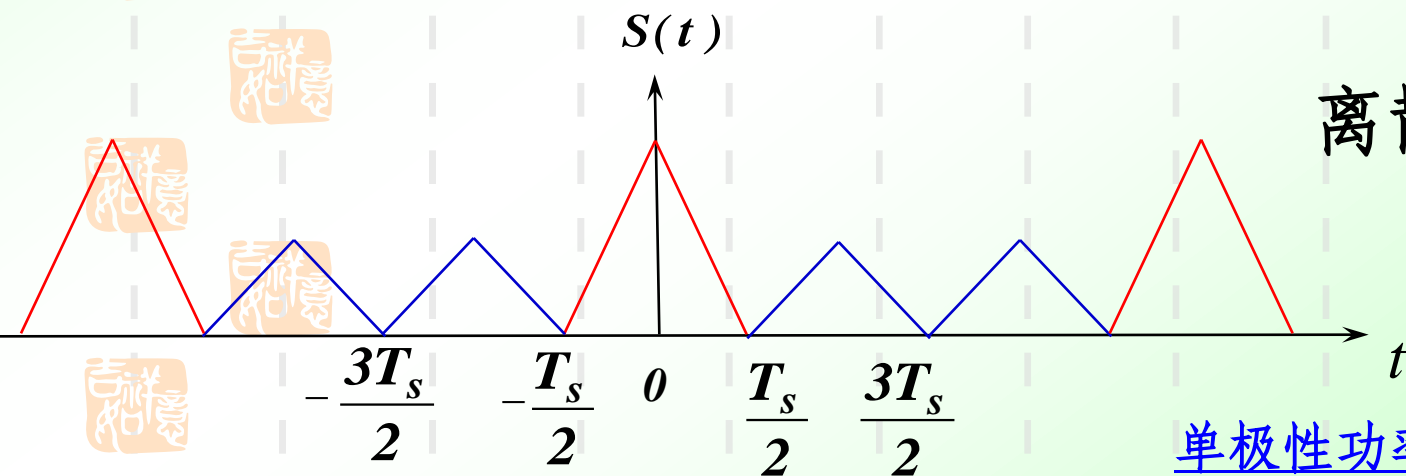
随机基带序列S(t)的功率谱密度



$$\text{双边谱: } P_s(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s [pG_1(mf_s) + (1-p)G_2(mf_s)]|^2 \delta(f - mf_s) \\ + f_s p(1-p) |G_1(f) - G_2(f)|^2$$

$$\text{单边谱: } P_s(f) = 2f_s p(1-p) |G_1(f) - G_2(f)|^2 + f_s^2 |pG_1(0) + (1-p)G_2(0)|^2 \delta(f) \\ + 2f_s^2 \sum_{m=1}^{\infty} |pG_1(mf_s) + (1-p)G_2(mf_s)|^2 \cdot \delta(f - mf_s)$$

$G_1(f), G_2(f)$ 分别表示高电平脉冲和低电平脉冲的频谱



离散谱和连续谱

单极性功率谱 双极性功率谱

单极性非归零信号功率谱

$$\because g_1(t) = 0 \quad g_2(t) = g(t)$$

$$\because G_1(f) = 0 \quad G_2(f) = G(f) \Leftrightarrow g(t)$$

$$\begin{aligned} P_s(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s [pG_1(mf_s) + (1-p)G_2(mf_s)]|^2 \cdot \delta(f - mf_s) + f_s p(1-p) |G_1(f) - G_2(f)|^2 \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s (1-p)G(mf_s)|^2 \cdot \delta(f - mf_s) + f_s p(1-p) |G(f)|^2 \end{aligned}$$

设 $g(t)$ 为矩形脉冲，且 $p=1/2$ $\therefore G(f) = T_s Sa(\pi f T_s)$

$$\begin{aligned} P_s(f) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s \cdot \frac{1}{2} G(mf_s)|^2 \cdot \delta(f - mf_s) + \frac{1}{4} f_s |G(f)|^2 \\ &= \frac{1}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |Sa(\pi m f_s T_s)|^2 \cdot \delta(f - mf_s) + \frac{1}{4} T_s \cdot Sa^2(\pi f T_s) \\ &= \frac{1}{4} \delta(f) + \frac{1}{4} T_s \cdot Sa^2(\pi f T_s) \end{aligned}$$

[频谱图](#)

$Sa(\pi f T_s)$ 在 $f = m f_s$
处为零点 ($m \neq 0$)

特征：包含离散谱和连续谱

双极性非归零信号功率谱

$$g_1(t) = -g_2(t) = g(t) \quad G_1(f) = -G_2(f) = G(f)$$

双极性矩形脉冲

$$P_s(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |f_s(2p-1)G(mf_s)|^2 \cdot \delta(f - mf_s) + 4f_s p(1-p) |G(f)|^2$$

$$= f_s |G(f)|^2 \quad p=1/2$$

$$= T_s Sa^2(\pi f T_s) \quad \text{矩形脉冲}$$

特征：只有连续谱

结论：1、随机脉冲序列的功率谱包括：1) 连续谱 $P_u(f)$

2) 离散谱 $P_v(f)$

2、无论 $g_1(t)$ 与 $g_2(t)$ 的形式， $P_u(f)$ 总是存在

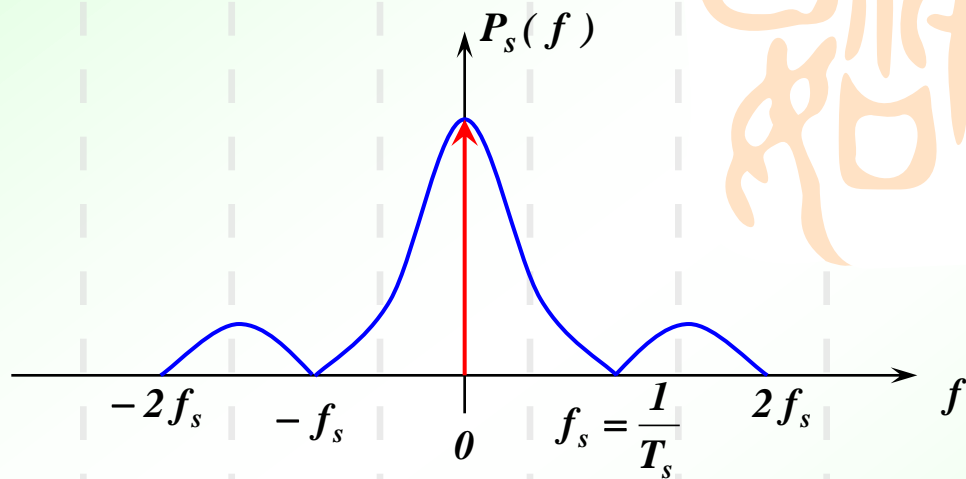
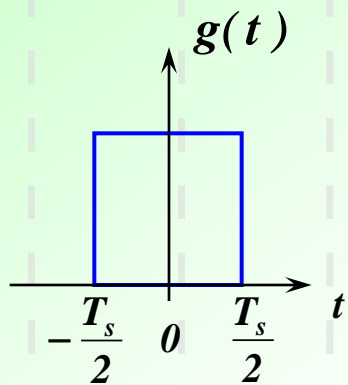
$$[\because G_1(f) \neq G_2(f)]$$

3、当 $g_1(t)$ 与 $g_2(t)$ 为双极性脉冲，且 $p=1/2$ 时 $P_v(f)=0$

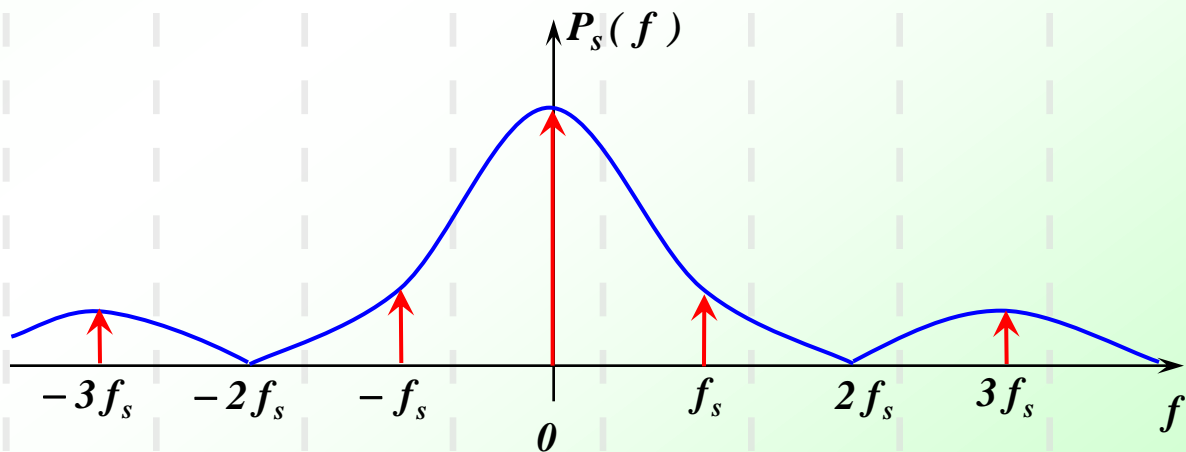
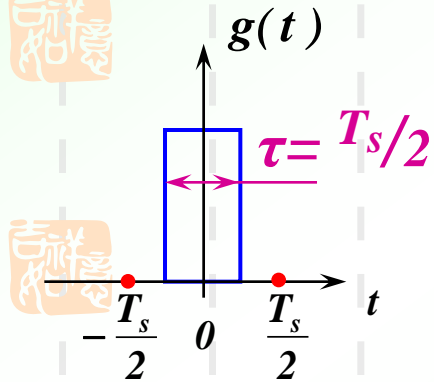
频谱图

功率谱表达式

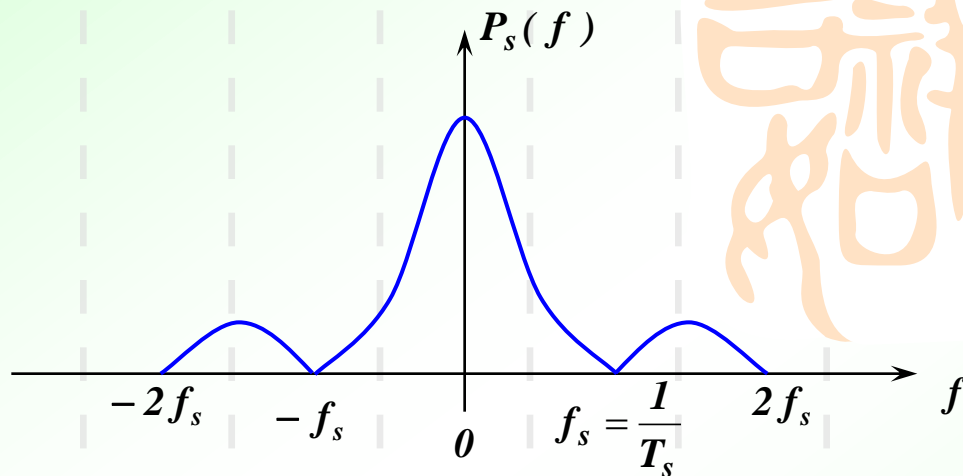
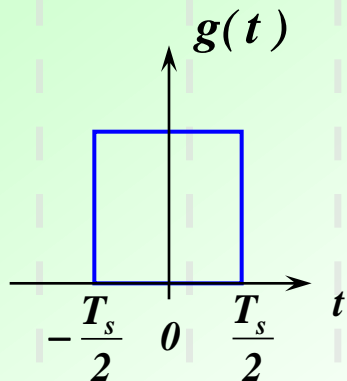
NRZ:



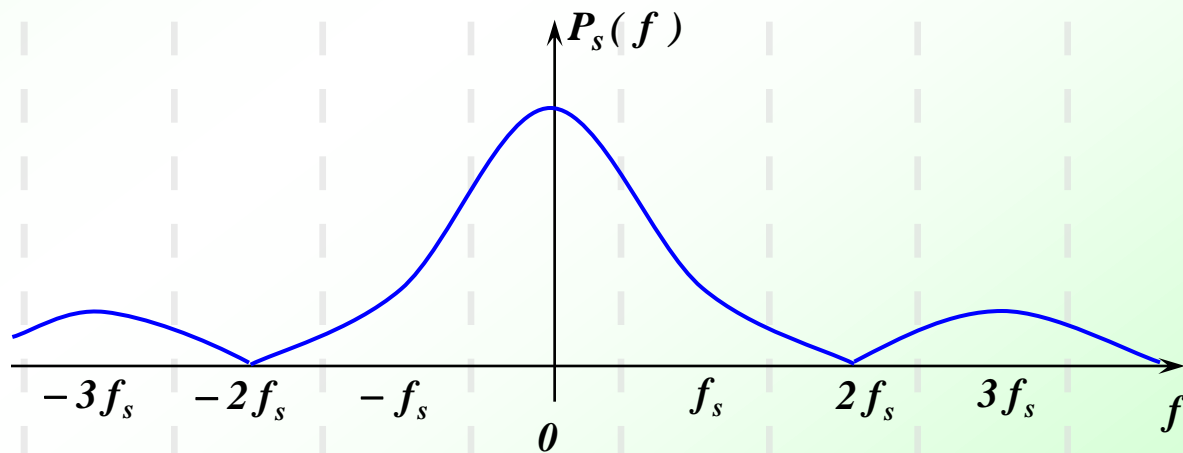
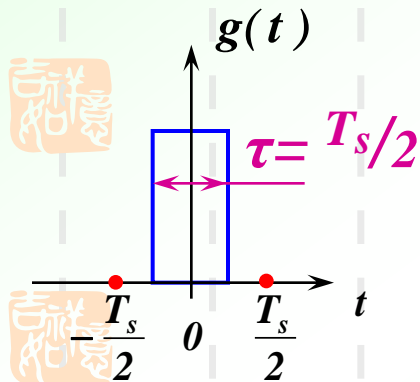
RZ:



双极性非归零:



双极性归零:



频谱特性不仅反映功率谱的计算, 还可以根据离散谱是否存在判断能否从 $S(t)$ 中提取需要的定时信息。

频谱特征对于位同步, 载波同步问题的研究起着重要作用。

4.2 基带传输的常用码型

不同的码型具有不同的功率谱结构，须根据信道的传输特性来选择

传输码的功率谱结构特性：

1、无直流、很少的低频分量和高频分量，以便实现远距离通信

2、能从基带信号中获取定时信息；

AMI码

3、不受信息源统计特性的影响

HDB₃码

PST码

} 三元码

4、具有一定的检错能力

5、易于实现

二元码

曼彻斯特码 (Manchester)

密勒码 (Miller)

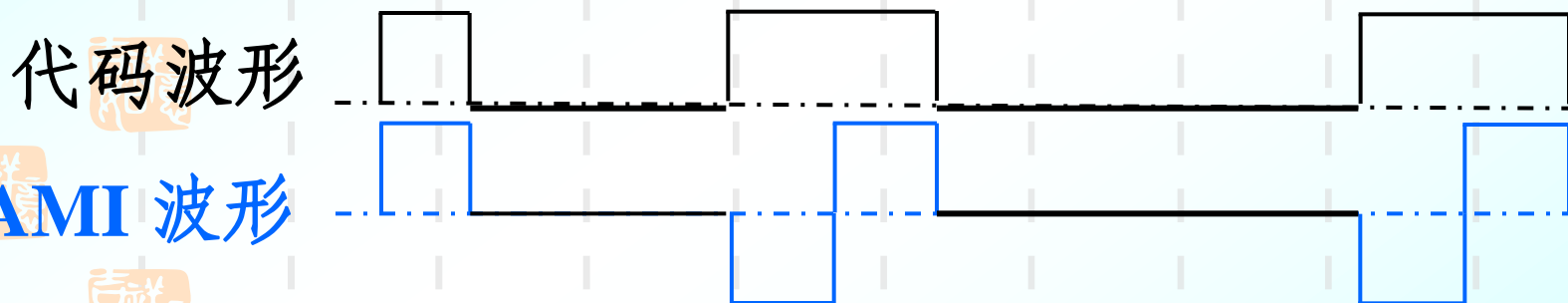
CMI码

AMI 码：传号交替反转码

规则：代码 “1”（传号）—— 传输码 交替为 “+1”、“-1”
“0”（空号）—— 传输码 “0”

例：消息代码：1 0 0 1 1 0 0 0 1 1

AMI 码：+1 0 0 -1 +1 0 0 0 -1 +1



- 特点：
- 1) 无直流分量，低频成分很小。
 - 2) 当出现长串连“0”时，提取定时时钟困难。
 - 3) 三进制码，实现简单

HDB₃ 码：三阶高密度双极性码（改进的 AMI 码）

规则：代码“1”（传号）—— 传输码 交替为“+1”、“-1”

“0”（空号）—— 传输码 “0”；破坏点 **V** 处

为“+1”或“-1”

破坏点 **V** 的规则：

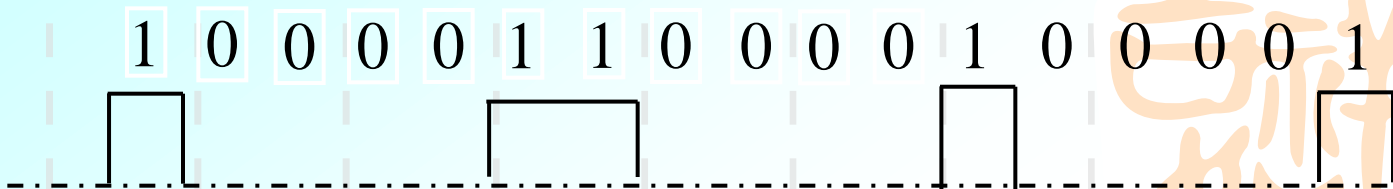
1) 每 4 个连“0”小段的第 4 位是破坏点 **V**，**V** 的极性与前一个非 0 符号的极性相同；

2) +**V**、-**V** 交替出现；

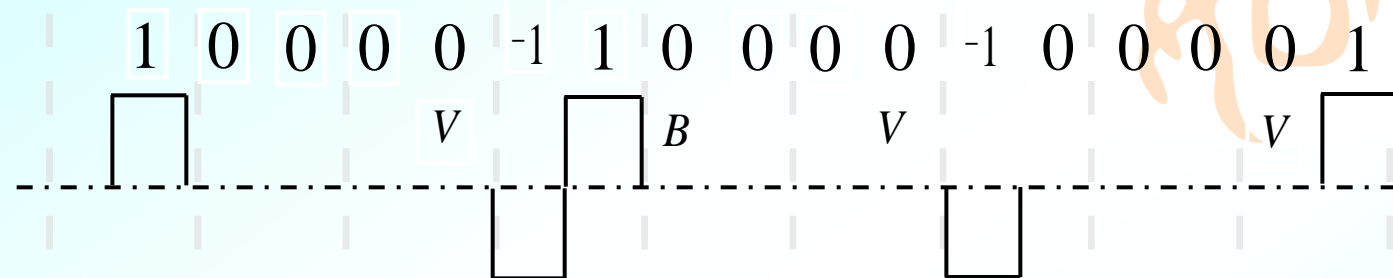
3) 当相邻 **V** 符号之间有偶数个非 0 符号时，必须将后面连“0”小段的第一位换成 **B**，**B** 符号的极性与相邻前一非 0 符号的极性相反，**V** 的极性同 **B**，**V** 后面的非 0 符号极性从 **V** 开始调整。

例

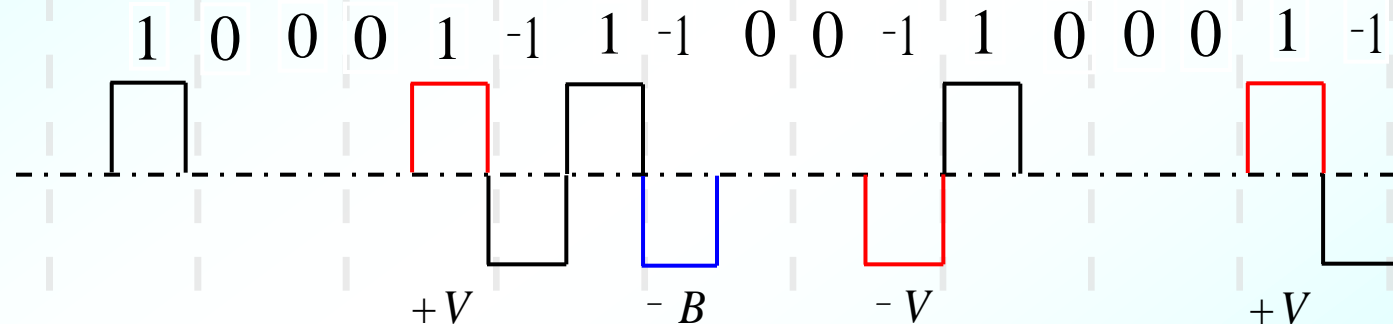
代码波形



AMI 波形



HDB₃ 波形



特点:1) 每一个破坏点V的极性总是与前一个非0符号的极性相同。B也视为非0符号。

2) 只要找到破坏点V, 就可判断其前面必为3个连0符号。

3) 利于提取定时时钟。

PST 码——成对选择三进制

- 规则: 1) 将二进制代码分组, 2 个码元为一组, 共 4 种状态。
 2) 每组用选定的两位三进制数字表示(三进制数字为 +、-、0, 两两组合共 9 种状态, 选其中 4 种有电位变化的状态)

二进制代码	+ 模式	- 模式
0 0	- +	- +
0 1	0 +	0 -
1 0	+ 0	- 0
1 1	+ -	+ -

+、- 模式
交替使用以
使直流分量
为 0。

例:

代码	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0
+ 模式	0	+	-	+	+	-	-	0	+	0	+	-	-	+
- 模式	0	-	-	+	+	-	+	0	-	0	+	-	-	+

- 特点: 1) 无直流分量, 提供定时时钟
 2) 需建立帧同步, 以提供分组信息

曼彻斯特码: 双相码 (Manchester)

规则: 代码 “1” (传号) ---- 传输码 “10”
“0” (空号) ---- 传输码 “01”

例: 消息代码 1 1 0 0 1 0
 双相码 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1

特点: 1) 只有两个电平值, 代码的中点出现跳变

2) 提供定时分量, 有检错能力

3) 码元宽度压缩一倍, 信号带宽增加一倍

4) 需帧同步

密勒码：(Miller)延迟调制码——双向码的变形。

●规则：代码 “1” (传号) —— 传输码 “10” 或 “01”
“0” (空号) —— 传输码 “00” 或 “11”

说明：1) 代码 “1” 对应的传输码中点必出现跳变，因而要求连续 “1” 之间不出现跳变

2) 代码 “0” 对应的传输码中点必不出现跳变，因而要求连续 “0” 之间出现跳变

3) 代码 “1” 与代码 “0” 之间不跳变

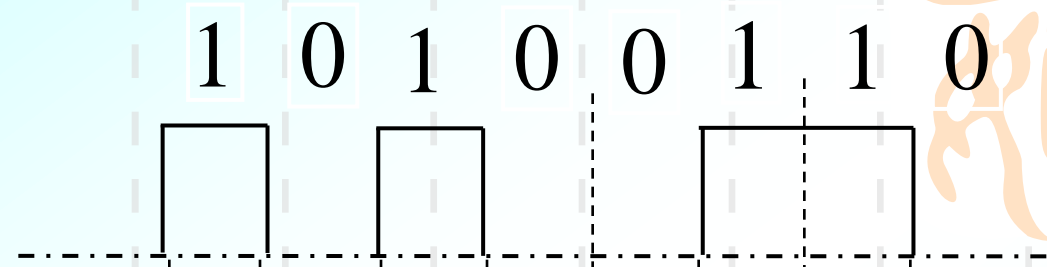
特点：1) 提供定时分量，无检错能力

2) 码元宽度比双向码大，信号带宽减小

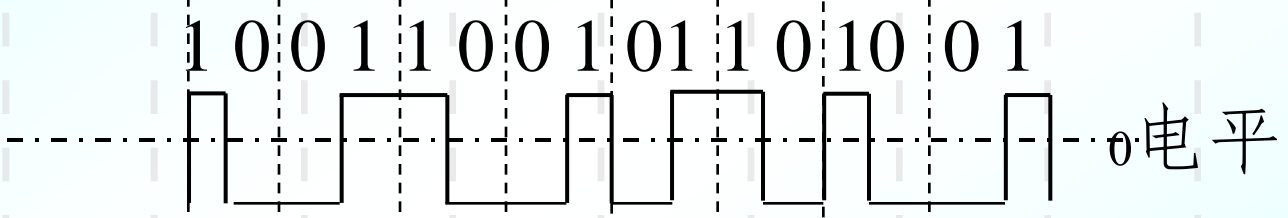


例:

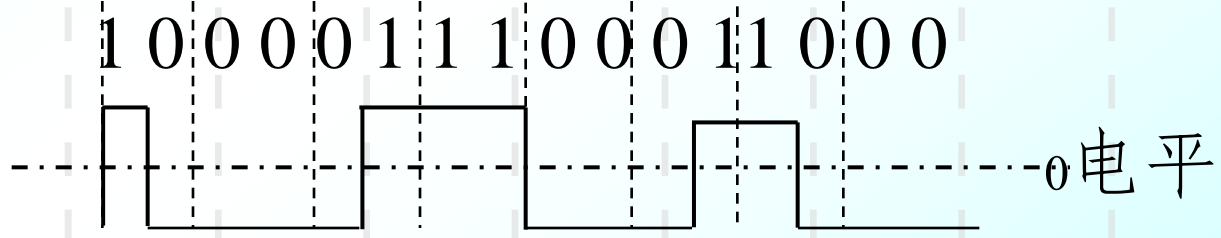
代码波形



双相码波形



密勒码波形



CMI 码：传号反转码

规则：代码 “1”（传号）—— 传输码 “11” 或 “00”
“0”（空号）—— 传输码 “01”

说明：代码 “1” 对应的传输码 “11”、“00” 交替出现

例：消息代码 1 1 0 1 0 0 1 0

CMI 码 11 00 01 11 01 01 00 01

特点：定时信息丰富（电平跳变点多）

该码被推荐为 PCM 四次群的接口码型。

nBmB码 ($m>n$)

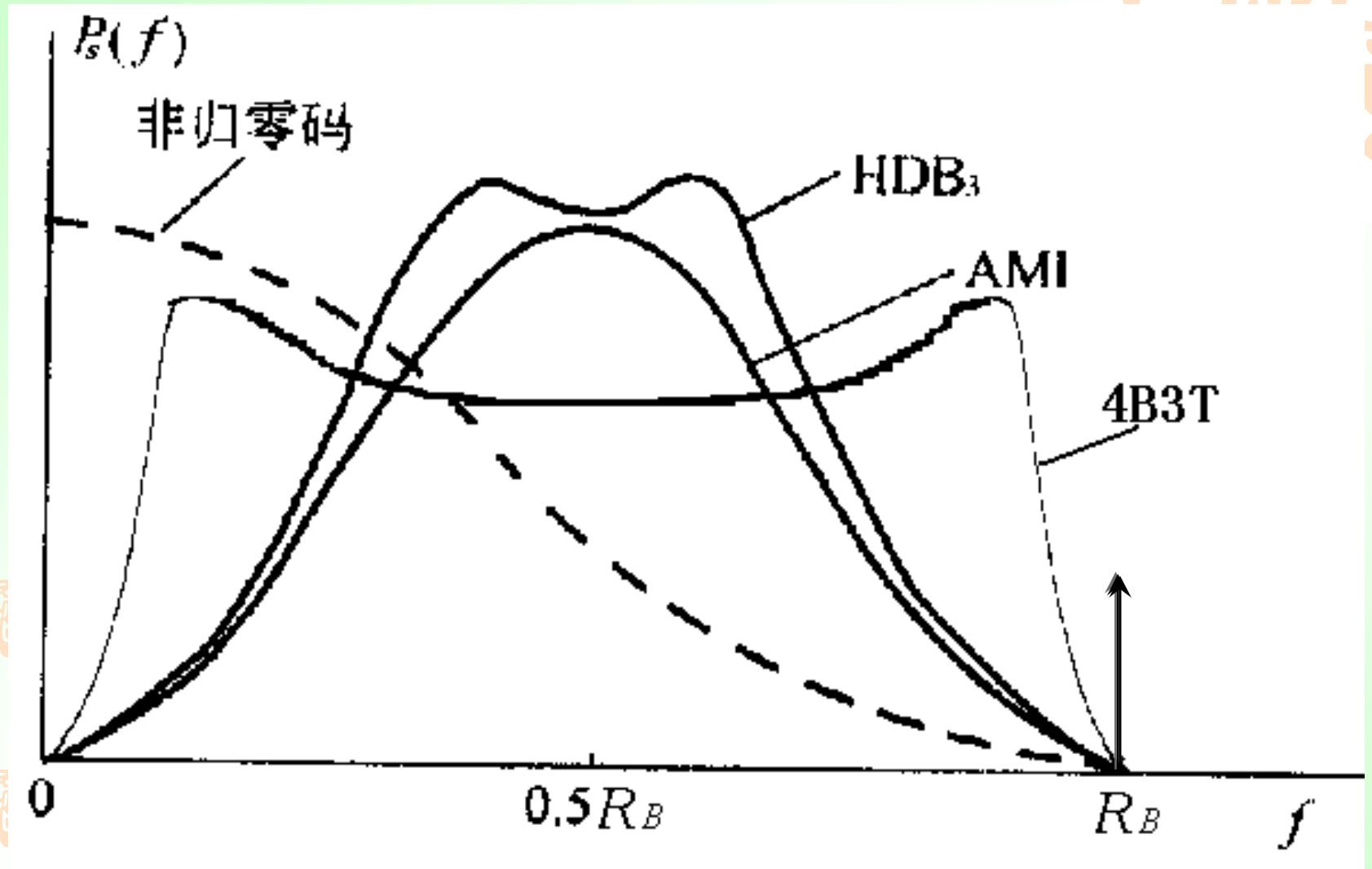
- 把n位二进制信息代码作为一组，变换为m位二进制编码作为新的码组。新码组可能有 2^m 种组合，故多出 (2^m-2^n) 种组合。从中选择一部分有利码组作为可用码组，其余为禁用码组，具有检错能力。双相码、密勒码和CMI码都可看作是1B2B码。
- 在光纤数字传输系统中，通常选择 $m=n+1$ ，取1B2B码、2B3B码以及5B6B码等，其中，5B6B码型已用作三次群和四次群的线路传输码型。



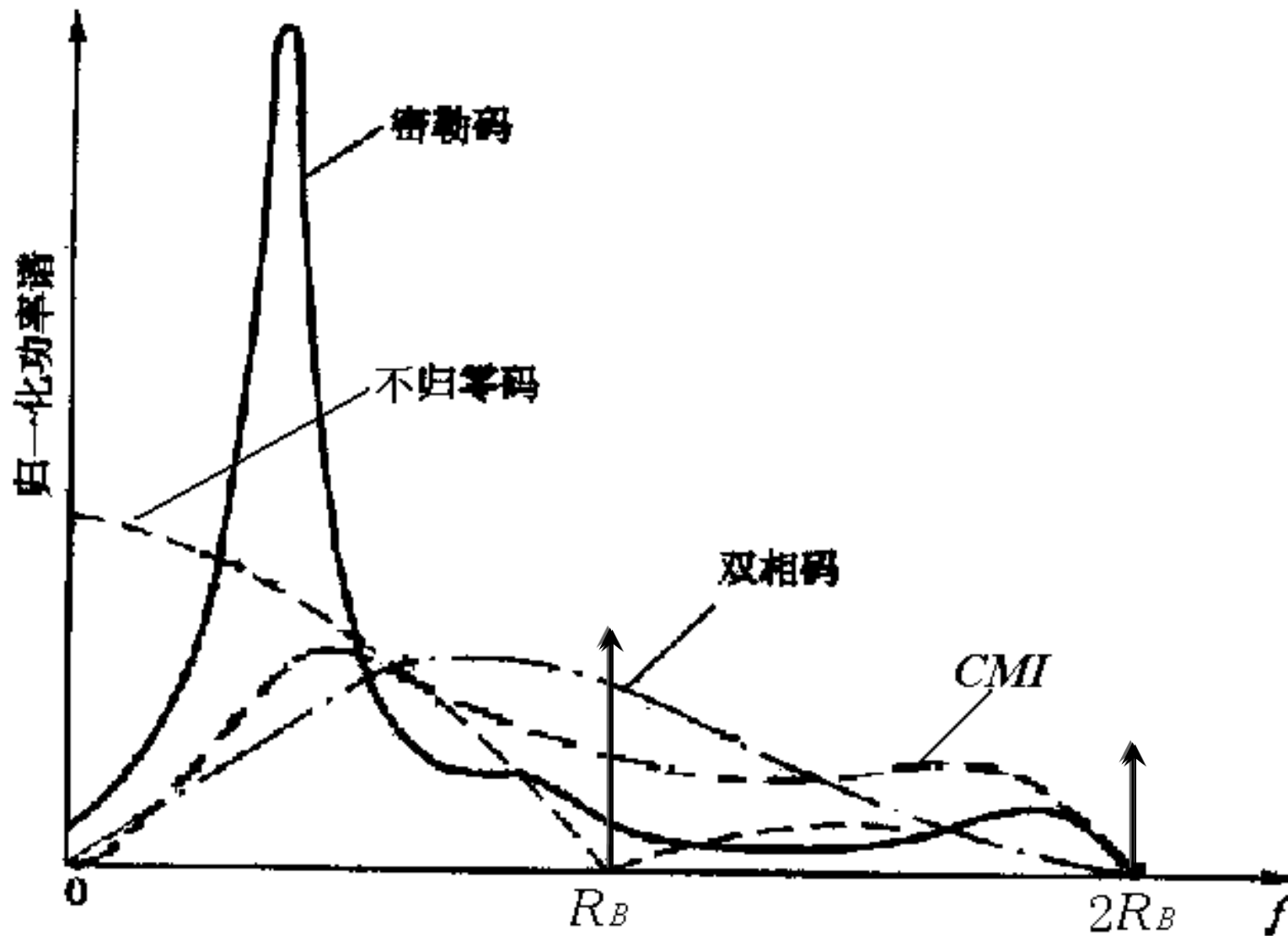
4B/3T码

它把4个二进制符号变换成3个三进制符号。显然，在相同的消息符号速率下，4B/3T码的传输速率要比1B/1T的低；因而可提高单位频带的利用率。它的性能比AMI码更好；适用于较高速率的数据传输系统。





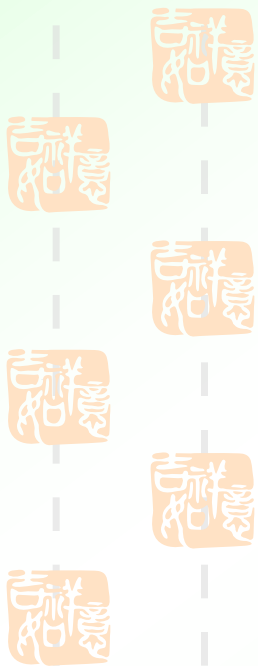
三元码功率谱



二元码功率谱



4.3 无码间干扰的基带传输



4.3.1 基带脉冲传输特点

发送端：形成原生基带信号并将其送入信道。

接收端：为抑制噪声，加接收滤波器，并用判决识别电路从接收信号中获得再生基带信号。

原生基带信号与再生基带信号之间不可避免地存在差异

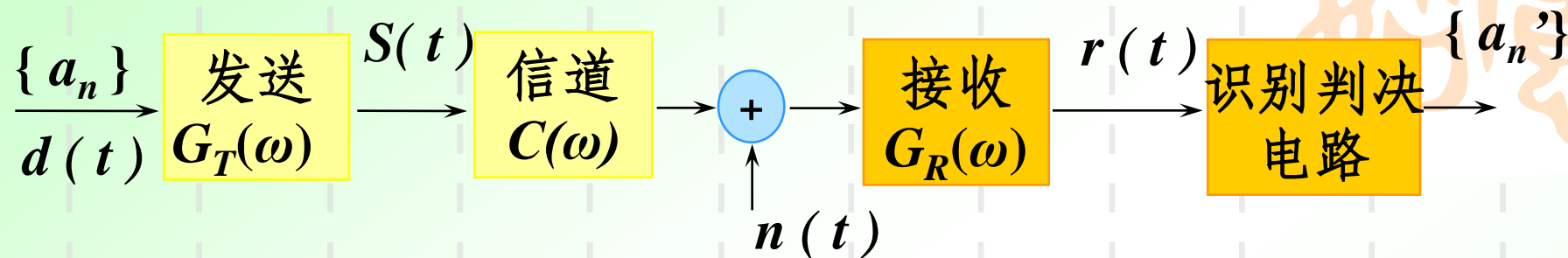
存在差异的原因：1) 系统传输性能不理想

2) 加性噪声影响

3) 抽样点偏离（同步性能不好引起）

系统传输性能不理想引入的差异称为码间干扰

4.3.2 定量分析



设 发送 $\{a_n\}$ 为冲激脉冲序列

$$d(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta(t - nT_s)$$

$$a_n = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$

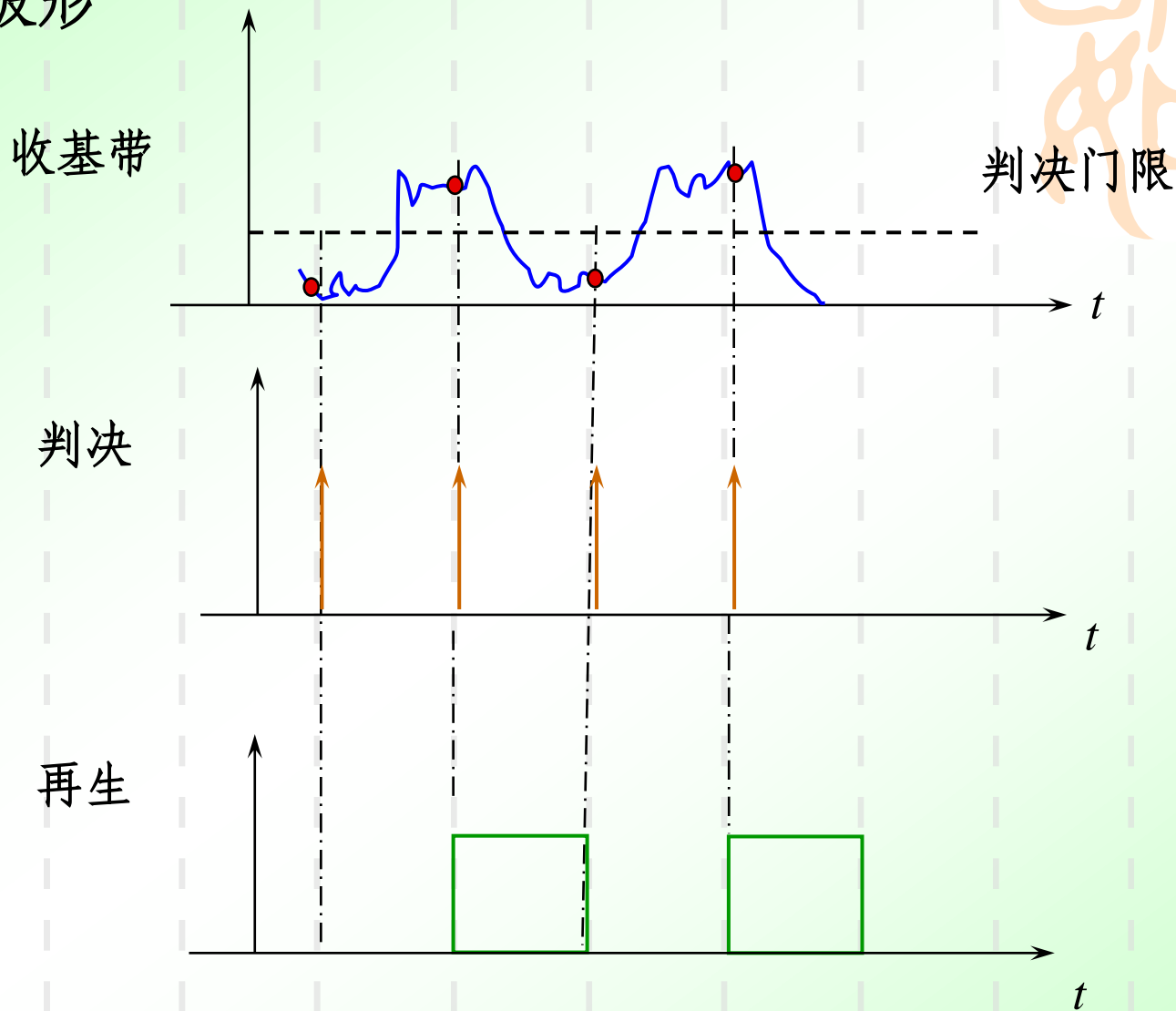
T_s : 码元宽度

令 $h(t) \leftrightarrow H(\omega) = G_T(\omega) C(\omega) G_R(\omega)$ 系统冲激响应

$$\therefore r(t) = d(t) \otimes h(t) + n_R(t)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(t - nT_s) + n_R(t)$$

再生信号波形



吉祥如意



$r(t)$ 通过 **识别判决电路**，生成再生基带信号序列 $\{a_n\}$
识别判决电路在抽样时刻 $t=kT_s+t_0$ (令 $t_0=0$)，进行抽样。

根据 $r(kT_s)$ 的值判断，生成 a'_{kT_s} 。

若 a'_{kT_s} 与发送信号相应的 a_{kT_s} 相同则正判，反之误判

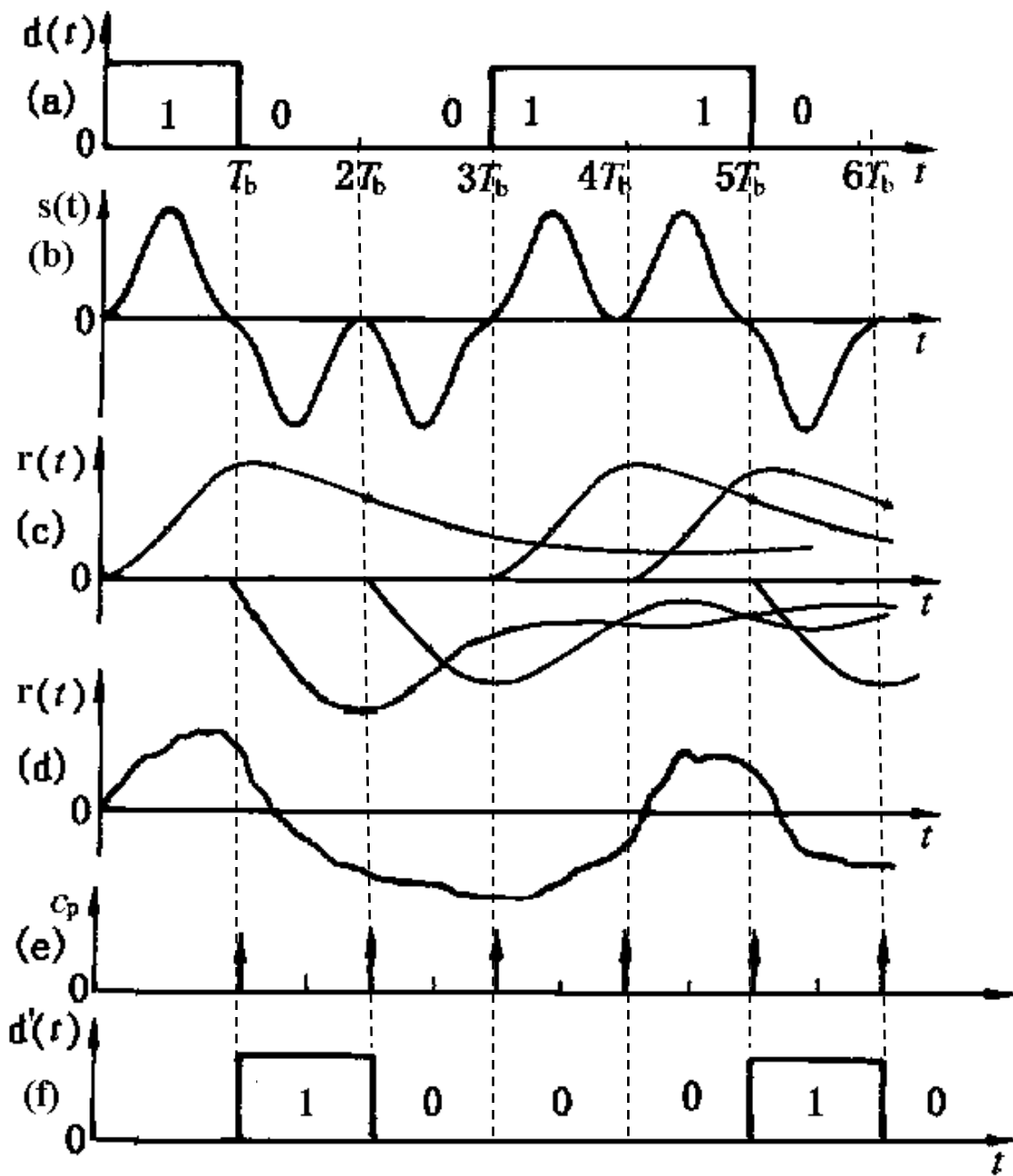
$$\begin{aligned}\therefore r(kT_s) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(kT_s - nT_s) + n_R(kT_s) \\ &= a_k h(0) + \sum_{n \neq k} a_n h(kT_s - nT_s) + n_R(kT_s)\end{aligned}$$

😊 $a_k h(0)$ ：发端第 k 个波形在抽样时刻产生响应值

😞 $\sum_{n \neq k} a_n h(kT_s - nT_s)$ ：发端第 k 个以外所有波形在抽样时刻产生响应值，称为 **码间干扰**

😞 $n_R(kT_s)$ ：噪声干扰

吉 祥 號



吉祥號

吉祥號

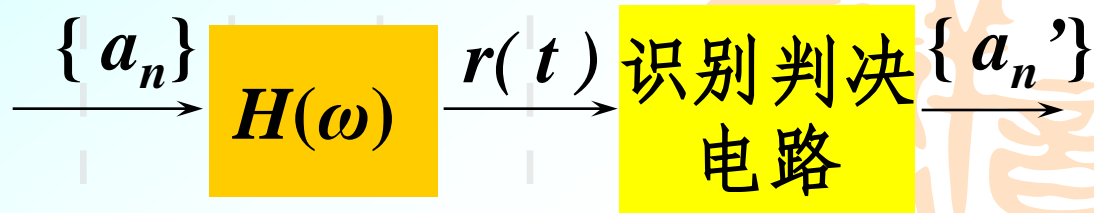
吉祥號

吉祥號

吉祥號

吉祥號

4.3.3 $H(\omega)$ 的特性



$$r(kT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h(kT_s - nT_s)$$

$$\text{令 } n_R(t) = 0$$

$$= a_k h(0) + \sum_{n \neq k} a_n h[(k-n)T_s]$$

T_s : 码元宽度 传输速率 $R_B = 1/T_s$

当 $\sum_{n \neq k} a_n h[(k-n)T_s] = 0$ 时, $(k-n) \neq 0$

实现无码间干扰传输。

令 $k-n=k$

\therefore 无码间干扰的时域条件: $h(kT_s) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

寻找满足 $h(kT_s) = \begin{cases} 1 & k=0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

的系统 $H(\omega)$

$H(\omega)$ 的推导

结论：无码间干扰的频域条件

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + 2\pi i \cdot R_B) \\ = \text{常数} \quad \left| \omega \right| \leq \pi \cdot R_B \quad (\text{一个周期内})$$

等效系统函数 $H_{eq}(\omega)$ 的含义：

将 $H(\omega)$ 在 ω 轴上以 $2\pi i R_B$ 为步长进行左、右平移，
然后对平移产生的所有函数求和，生成 $H_{eq}(\omega)$

4.3.4 奈奎斯特第一准则（数字信号的传输准则）

❖ 如基带系统第一零点内的传输特性能等效成截止频率为 f_N 的理想低通特性[或者说能以点 $(f_N, 0.5)$ 互补对称], 那么系统就能以不高于 $2f_N$ 的码元速率, 实现无码间干扰传输。

❖ 奈奎斯特速率: 使系统不出现码间干扰的信号最高传输速率 $2f_N$ 。

❖ 奈奎斯特码元间隔: 奈奎斯特速率的倒数, $1/2f_N$ 。

❖ 频带利用率 η : 单位频带内的码元传输速率。

$$\eta = \frac{\text{信号传输速率}}{\text{系统带宽}}$$

理想值: $\eta_{max} = 2$

[例子](#)

例：已知理想低通如图所示，当码元速率 $R_B = 1/T_s$ 时，判断是否能实现无码间干扰传输？奈奎斯特速率为多少？

解：判断方法分为 频域法 和 时域法

* 频域法

$$\therefore H(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| \leq \pi/T_s \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

$$R_B = 1/T_s$$

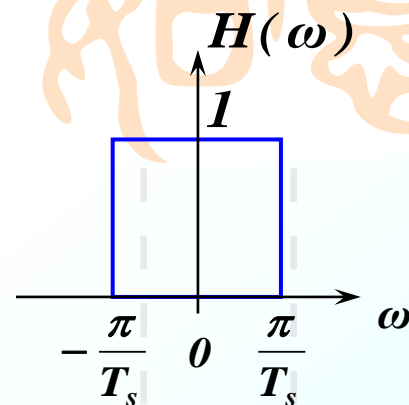
\therefore 生成判断区间 $(-\pi R_B, \pi R_B) = (-\pi/T_s, \pi/T_s)$

又 \therefore 要求 $H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + 2\pi i \cdot R_B) = \text{常数}$

\therefore 生成 $H(\omega) \quad H(\omega + \frac{2\pi}{T_s}) \quad H(\omega - \frac{2\pi}{T_s}) \dots$ 等

$\therefore H_{eq}(\omega) = \text{常数}$ ， 能实现无码间干扰传输

$$\text{频带利用率 } \eta = \frac{1/T_s}{1/2T_s} = 2$$

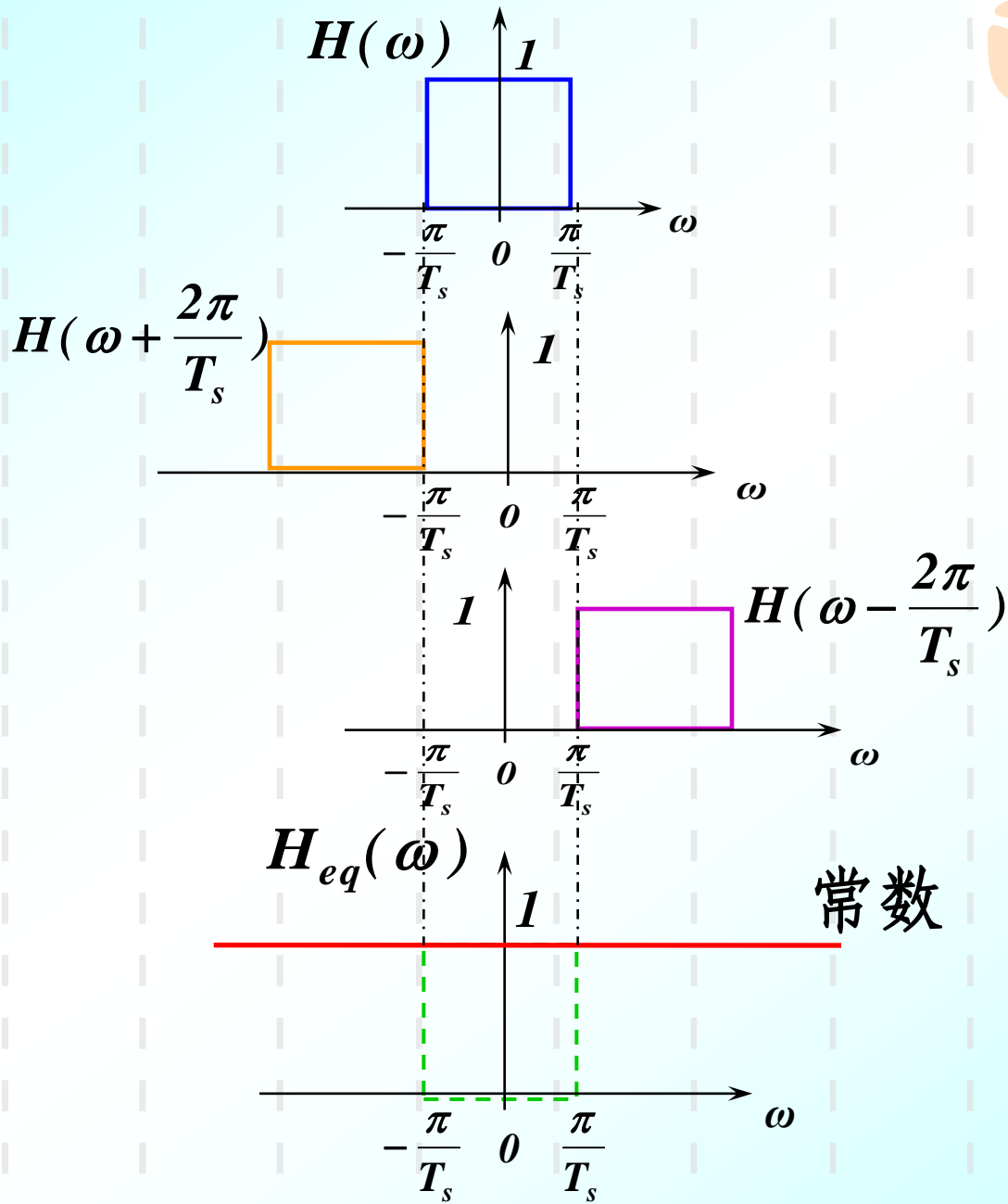


$$f_N = 1/2T_s$$

$$|\omega| \leq \pi \cdot R_B$$

作图判断

频域图:



求和:



* 时域法 从时域理解无码间干扰的定义

$$\begin{aligned}\therefore h(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T_s}^{\pi/T_s} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{T_s} \text{Sa}\left(\frac{\pi t}{T_s}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore h(t) \text{ 的零点为: } \quad \frac{\pi t}{T_s} &= n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ t &= nT_s\end{aligned}$$

$$\text{又} \therefore \text{无码间干扰的时域条件: } h(kT_s) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

零点间隔与传输速率 $T_s = \frac{1}{R_B}$ 的倒数相等

\therefore 理想低通能实现无码间干扰传输。奈氏速率为 $R_B = \frac{1}{T_s}$

[作图理解](#)

[讨论 \$R_B\$ 的变化](#)

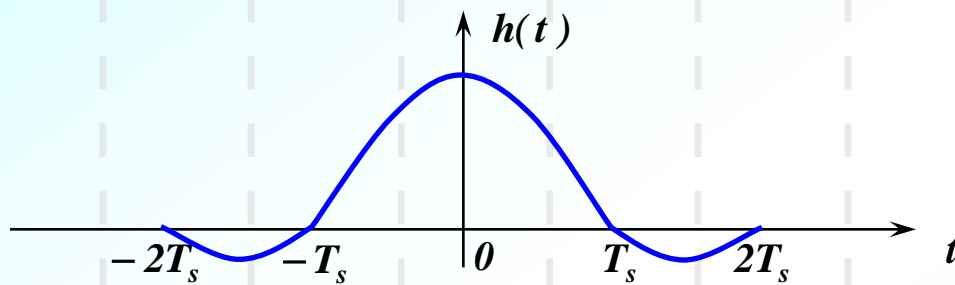
时域图:

1 1 0 1 1 1 0 1

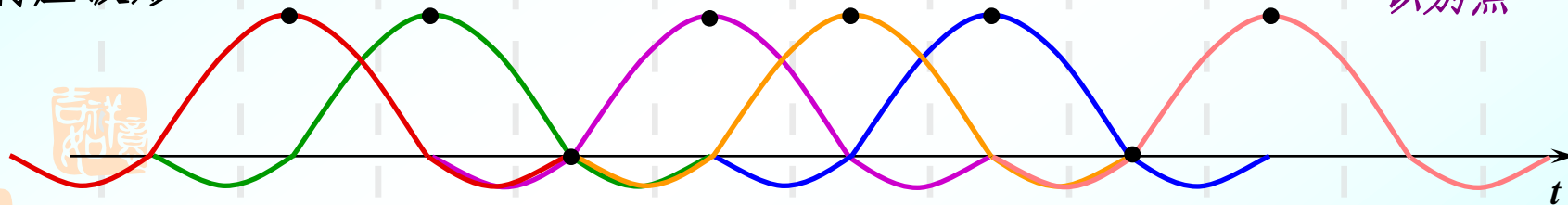
原生基带



系统冲激响应



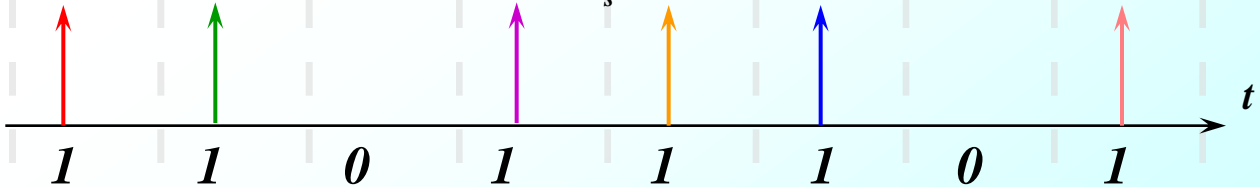
响应波形



判决脉冲

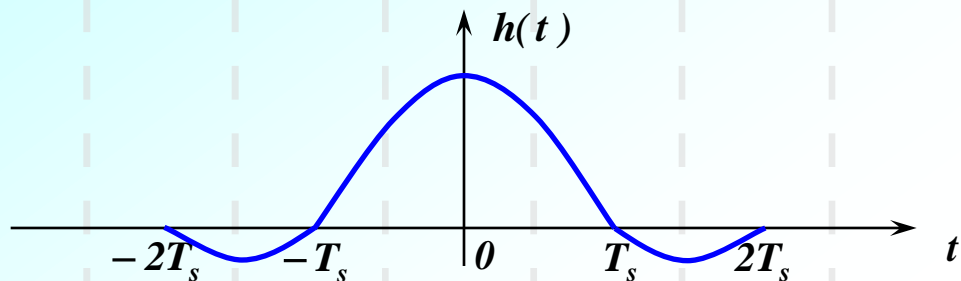


再生基带



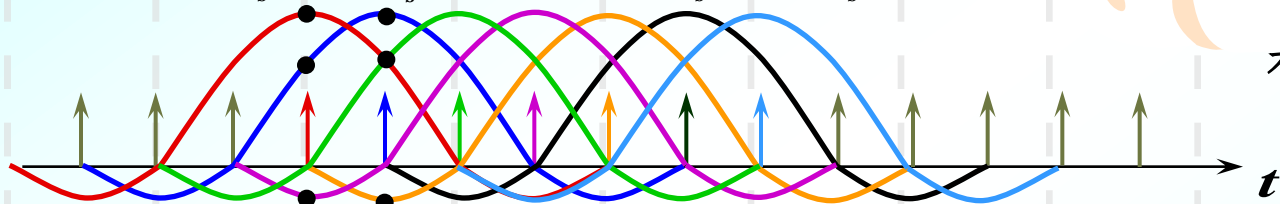


系统冲激响应



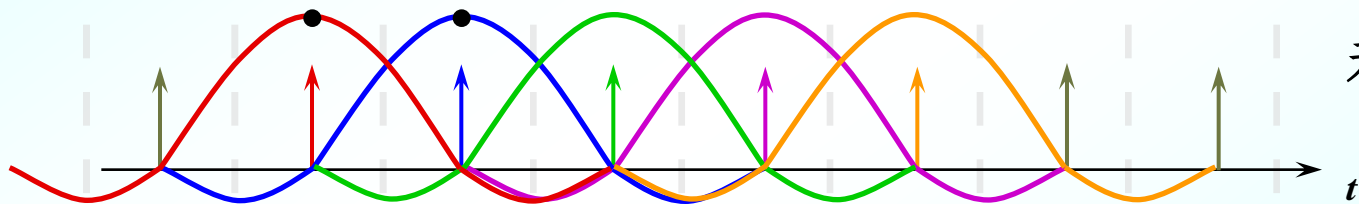
响应波形

$$R_B = \frac{2}{T_s}$$



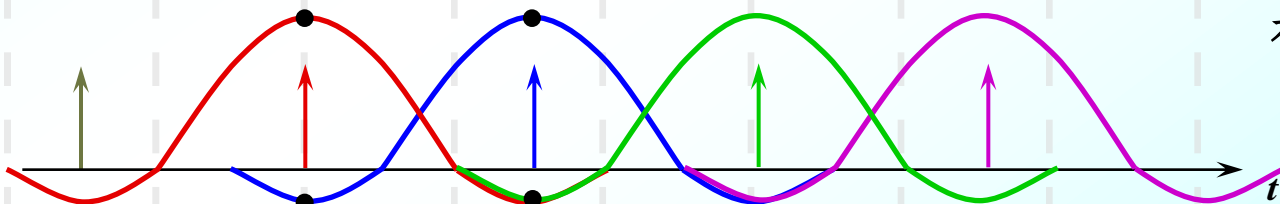
有干扰

$$R_B = \frac{1}{T_s}$$



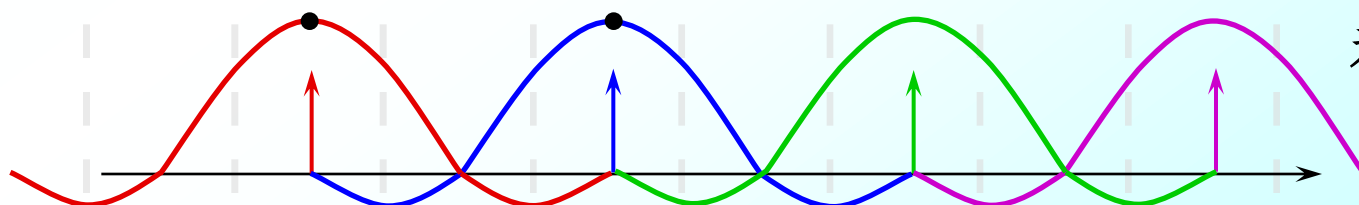
无干扰

$$R_B = \frac{2}{3T_s}$$



有干扰

$$R_B = \frac{1}{2T_s}$$



无干扰



结论: 1) 系统能实现无码间干扰传输的必要条件是:

$$h(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & \text{其它整数} \end{cases}$$

$$H_{eq}(\omega) = \sum_i H(\omega + 2\pi i \cdot R_B) = \text{常数} \quad |\omega| \leq \pi \cdot R_B$$

2) 奈奎斯特速率的值是 $h(n)$ 零点间隔的倒数

3) 其余能实现无码间干扰传输的速率是奈奎斯特速率的 $1/n$ 倍。

4) 频带利用率的理论最大值为 $2B/\text{Hz}$ 。

4.3.4 实际 $H(\omega)$

1) 理想低通物理不可实现； 2) 衰减振荡较大。

∴ 选用具有 **奇对称滚降特性**的低通滤波器作为传输网络

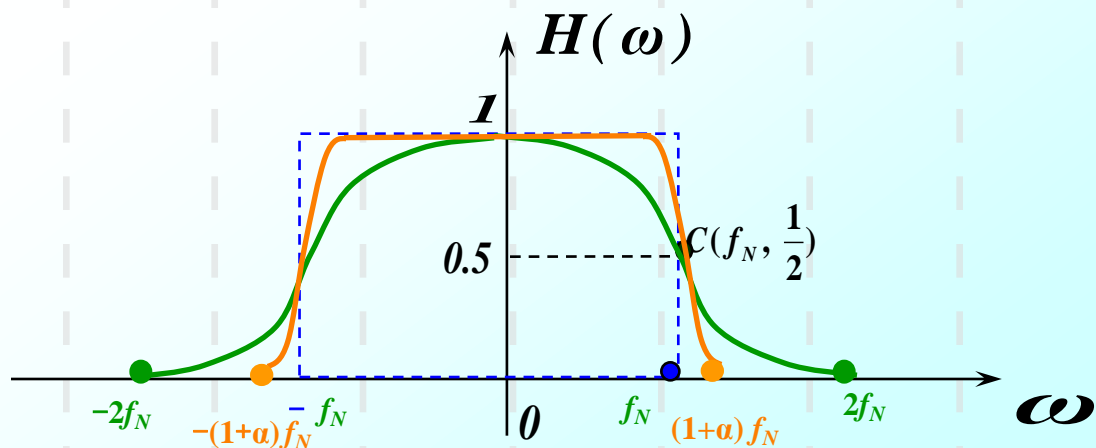
定义：只要滚降低通的幅频特性以 $C(f_N, \frac{1}{2})$ 点成奇对

称滚降，则可实现最高传输速率 $R_B = 2f_N$ 的基带

信号的无码间干扰传输。 特征：频带利用率 $\eta < 2$

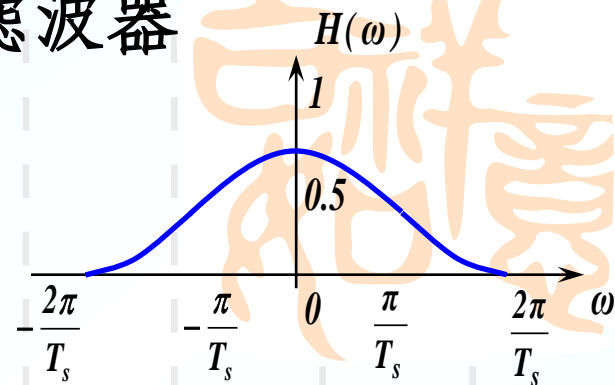
设滚降系统的截止频率为 ω_2 ，理想低通的截止频率为 ω_1 ，滚降系数

$$\alpha = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \quad 0 < \alpha \leq 1$$



例：已知具有升余弦幅频特性的低通滤波器

$$H(\omega) = \begin{cases} \frac{T_s}{2} \left(1 + \cos \frac{\omega T_s}{2}\right) & |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_s} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$



当码元速率 $R_B = \frac{1}{T_s}$ 时，判断能否实现无码间干扰传输。

解： * 频域法

$$\because R_B = 1/T_s$$

\therefore 生成判断区间 $(-\pi/T_s, \pi/T_s)$

\therefore 生成 $H(\omega) H(\omega + \frac{2\pi}{T_s}) H(\omega - \frac{2\pi}{T_s}) \dots$ 等

$\therefore H_{eq}(\omega) = \text{常数}$ ， 能实现无码间干扰传输

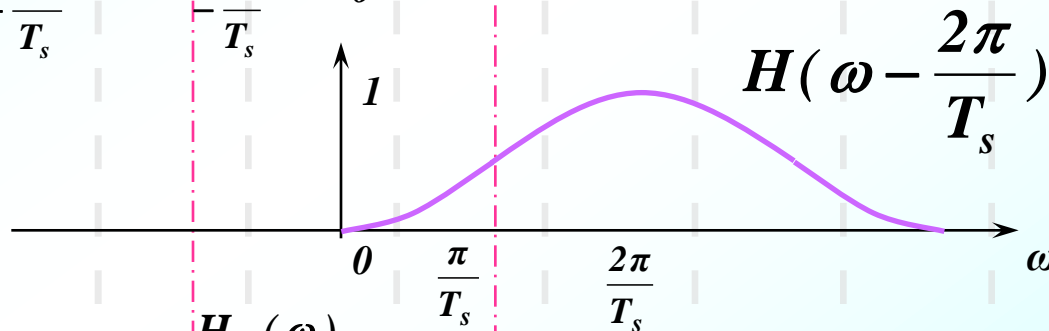
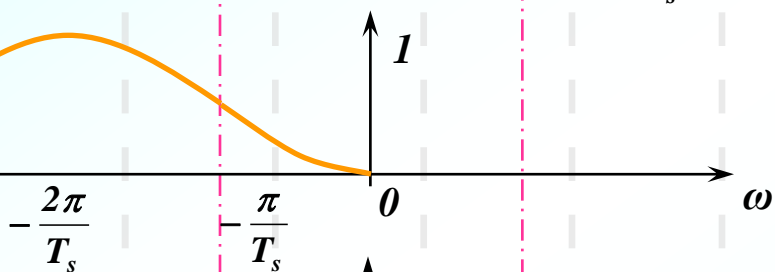
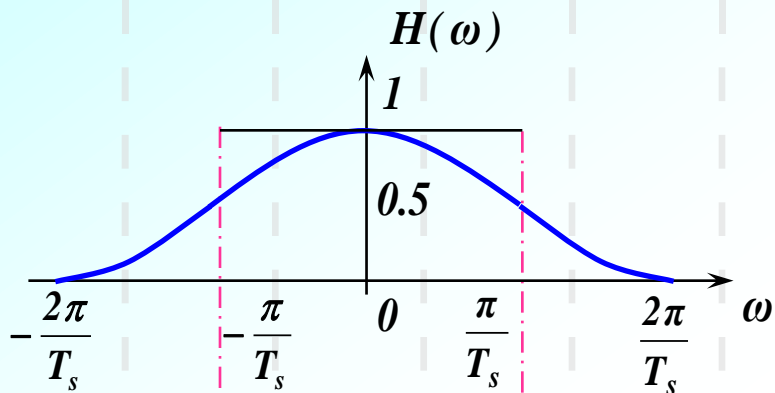
频带利用率

$$\eta = \frac{1/T_s}{1/T_s} = 1$$

吉祥如意

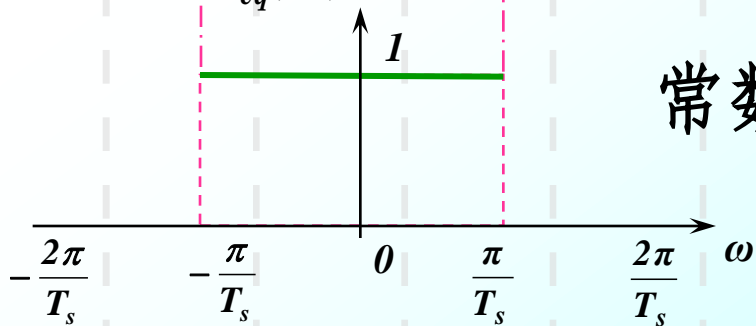
升余弦:

$$H(\omega + \frac{2\pi}{T_s})$$



求和:

$$H_{eq}(\omega)$$



常数

吉祥如意
吉祥如意
吉祥如意
吉祥如意

* 时域法 $\therefore h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/T_s}^{2\pi/T_s} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$

$$= \frac{\cos(\pi t / T_s)}{1 - 4t^2 / T_s^2} \cdot \text{Sa}(\frac{\pi t}{T_s})$$

$\therefore h(t)$ 的零点为:

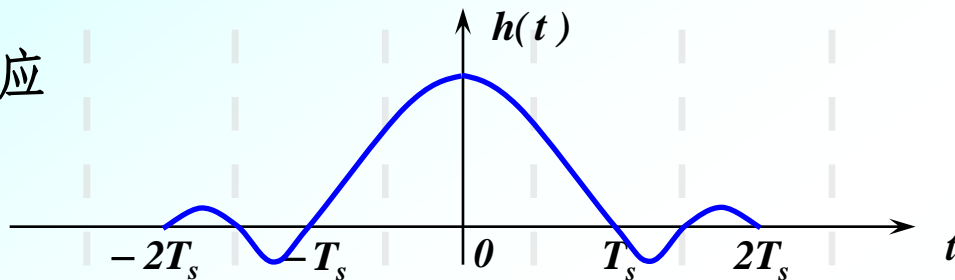
$\therefore \frac{\pi t}{T_s} = n\pi \quad n = 1, 2, 3 \dots$ 和 $\frac{\pi t}{T_s} = \frac{m\pi}{2} \quad m = 3, 5 \dots$

$\therefore t = n \frac{T_s}{2} \quad n = 2, 3, 4 \dots$ 在 $T_s/2$ 的整数倍处有零点

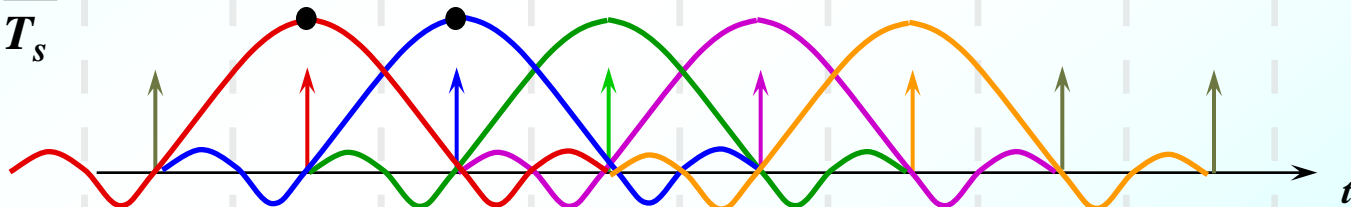
传输速率 $R_B = \frac{1}{T_s}$ 是零点间隔倒数的整数倍

\therefore 升余弦幅频特性低通能实现无码间干扰传输;
衰减振荡较小。

系统冲激响应

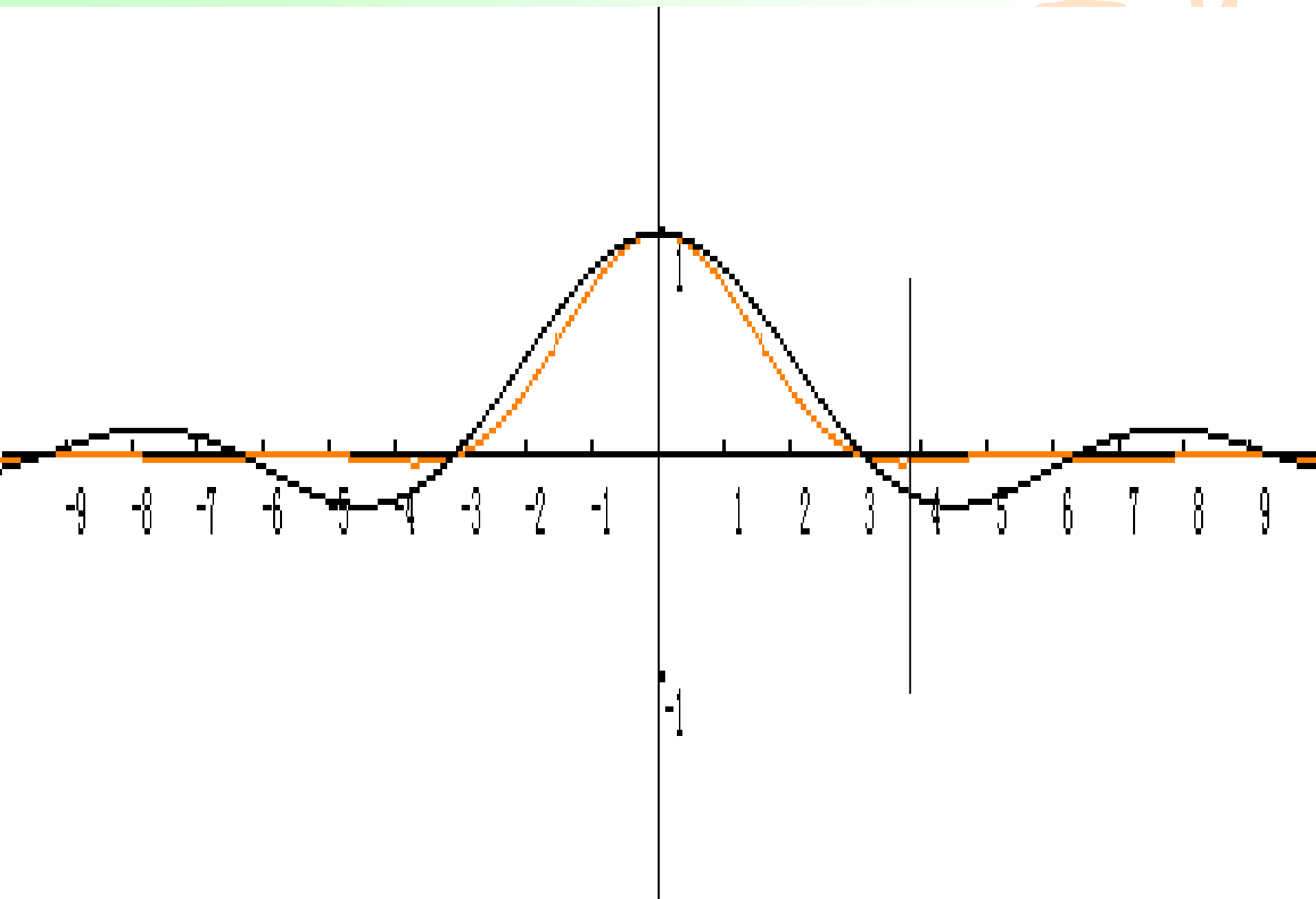


$$R_B = \frac{1}{T_s}$$



无码间干扰







4.4 无码间干扰基带系统的抗噪声性能

4.4.1 噪声的影响

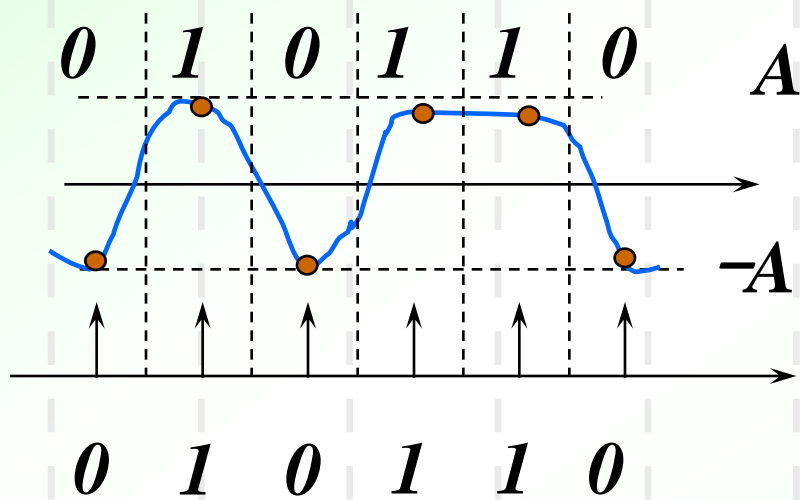
4.4.2 噪声参数

4.4.3 误码率计算



观察接收信号 $r(t)$

△ 无噪声系统

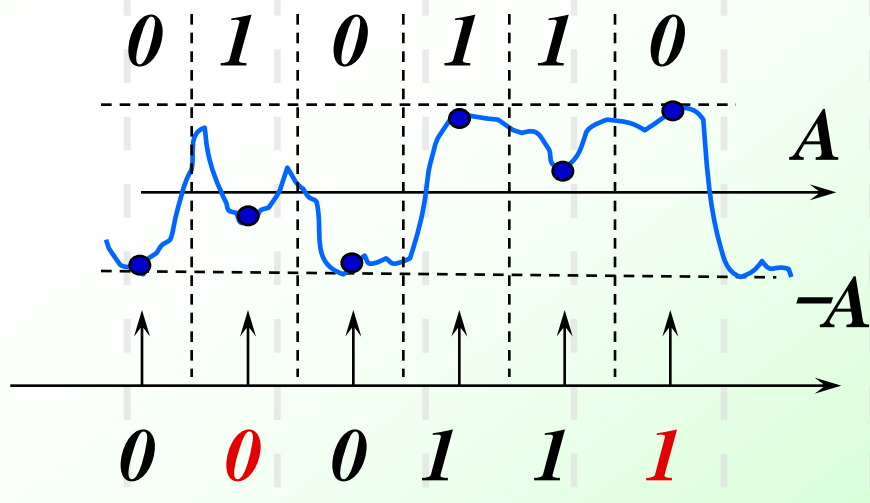


抽样脉冲

判决结果

判决电平

△ 有噪声系统



抽样脉冲

判决结果

判决电平

有误码

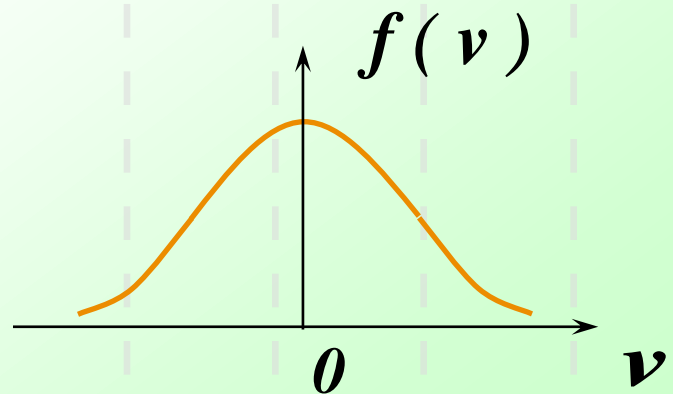
噪声分析

设信道噪声是均值为0的高斯白噪声，
∴ 通过接收滤波器后就是限带均值为0
的高斯白噪声 $n_R(t)$

已知 $n_R(t)$ 服从高斯分布，均值=0，方差= σ_n^2

∴ $n_R(t)$ 瞬时值 v 的一维概率密度函数为

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma_n^2}\right]$$



误码率计算

设 判决器输入为双极性信号

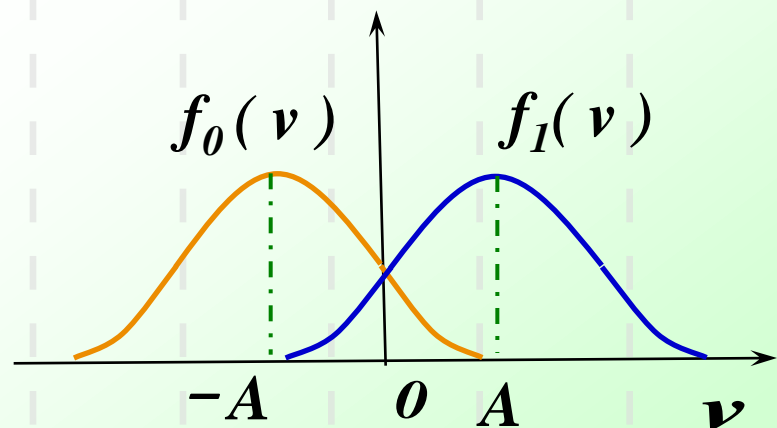
$$x(t) = \begin{cases} A + n_R(t) & \text{发“1” 均值为 } A \text{ 的高斯过程} \\ -A + n_R(t) & \text{发“0” 均值为 } -A \text{ 的高斯过程} \end{cases}$$

\therefore 发“1”时, $x_1(t)$ 的一维概率密度函数为

$$f_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(v-A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$

发“0”时, $x_0(t)$ 对应

$$f_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left[-\frac{(v+A)^2}{2\sigma_n^2}\right]$$



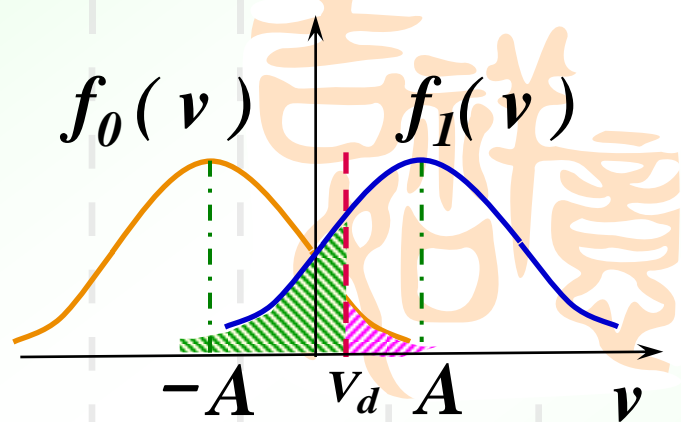
横坐标: 信号的幅度

误码形式为 $P(1 \rightarrow 0)$, $P(0 \rightarrow 1)$

令判决门限为 V_d

则 $p_{e1} = P(1 \rightarrow 0) = P(v < V_d)$

$$= \int_{-\infty}^{V_d} f_1(v) dv = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{V_d - A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$



$p_{e0} = P(0 \rightarrow 1) = P(v > V_d)$

$$= \int_{V_d}^{\infty} f_0(v) dv = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{V_d + A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

系统总误码率: $P_e = p(1)p_{e1} + p(0)p_{e0}$

其值大小与 V_d 有关

令 $\frac{dP_e}{dV_d} = 0$

$$V_d^* = \frac{\sigma_n^2}{2A} \ln \frac{p(0)}{p(1)}$$

最佳门限



当 $p(0) = p(1) = 1/2$ 时, $V_d^* = 0$

$$\therefore P_e = \frac{1}{2} [P_{e_1} + P_{e_0}] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

$\therefore P_e$ 的值取决于 A/σ_n , 与信号 “1”, “0” 的形式无关。

如果采用单极性信号波形, $p(1)=p(0)=1/2$ 时,

$$V_d^* = \frac{A}{2} + \frac{\sigma_n^2}{2A} \ln \frac{p(0)}{p(1)} = \frac{A}{2}$$

$\operatorname{erfc}(x)$ 和
 x 增长方
向相反

$$P_e = \frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{erf}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) \right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

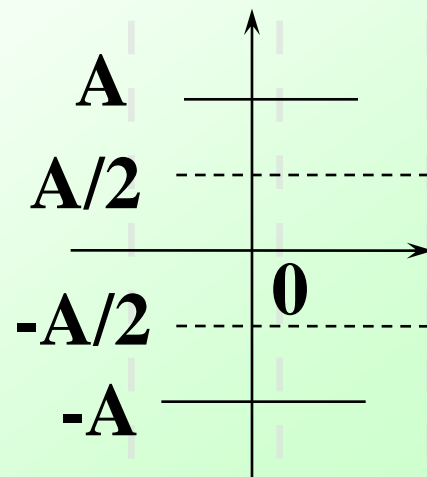
单极性基带系统的抗噪声性能不如双极性基带系统。


对于三元码，在抽样时刻的可能取值为 $+A$ 、 0 或 $-A$ 。

判决器的判决电平为 $-\frac{A}{2}$ 和 $\frac{A}{2}$ 。

当 $x(kT_s) > \frac{A}{2}$ 或 $x(kT_s) < -\frac{A}{2}$ 时，判决器输出“1”；

当 $-\frac{A}{2} < x(kT_s) < \frac{A}{2}$ 时，判决器输出“0”。




$$p_{e0} = \int_{-\infty}^{-\frac{A}{2}} f_0(x) dx + \int_{\frac{A}{2}}^{\infty} f_0(x) dx$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) - \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{3A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

$$p_{e1} = \int_{-\frac{A}{2}}^{\frac{A}{2}} f_1(x) dx = \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

若“1”码与“0”码等概发送，系统总误码率为

$$p_e = \frac{3}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right) - \frac{1}{4} \operatorname{erfc}\left(\frac{3A}{2\sqrt{2}\sigma_n}\right)$$

4.5 眼图



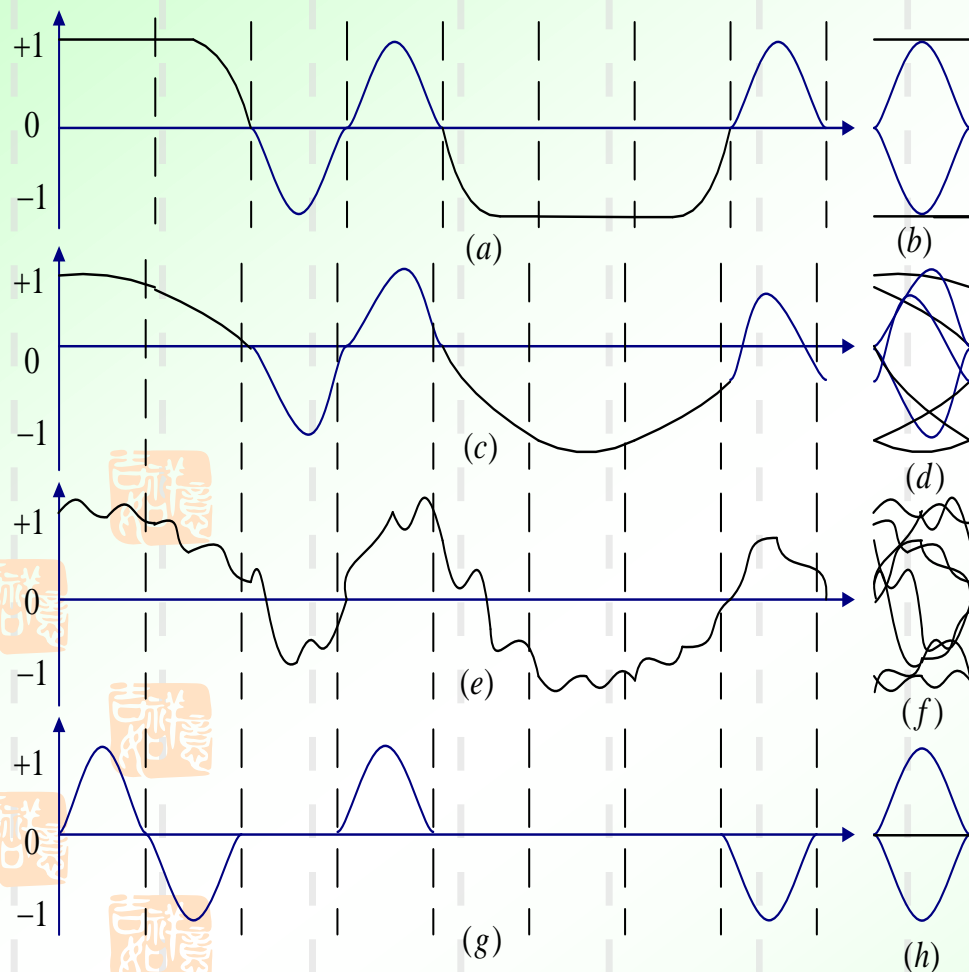
□ 眼图的概念

□ **眼图**是指利用实验的方法估计和改善（通过调整）传输系统性能时在示波器上观察到的一种图形。因为在传输二进制信号波形时, 示波器显示的图形很像人的眼睛, 故名“眼图”。

□ 具体方法

□ 用示波器测试接收滤波器的输出信号, 使示波器水平扫描周期等于接收码元的周期。此时可以从示波器显示的图形上, 观察码间干扰和信道噪声等因素影响的情况, 从而估计系统性能的优劣程度。

4.5 眼图

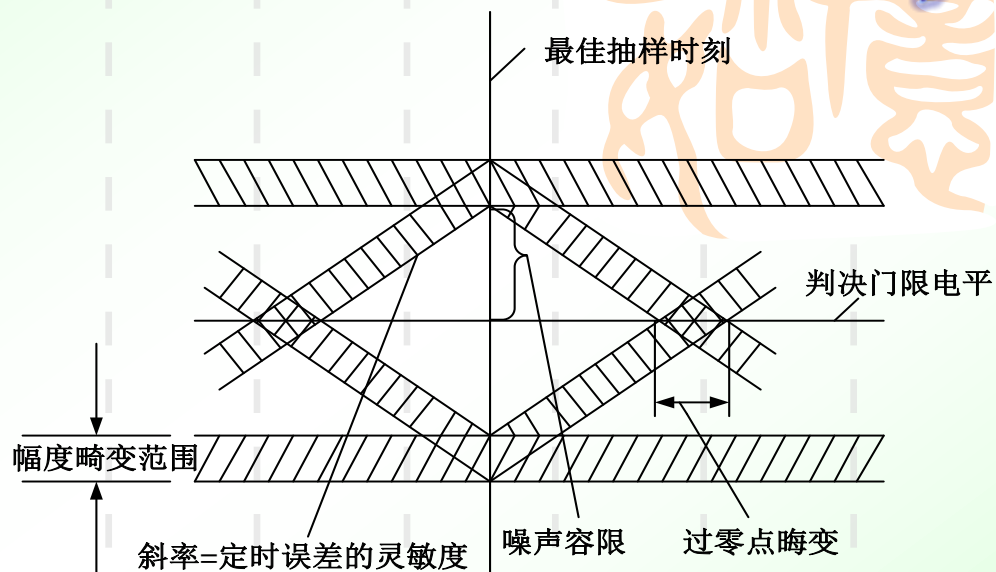


- 图 (a) 是双极性余弦滚降信号波形；
- 图 (b) 是无噪声、无码间干扰条件下二元信号的眼图；
- 图 (d) 是无噪声、有码间干扰条件下二元信号的眼图；
- 图 (f) 是有噪声、有码间干扰条件下二元信号的眼图；
- 图 (h) 是无噪声、无码间干扰条件下 AMI 码的眼图；

4.5 眼图



眼图模型



- 最佳抽样时刻应是“眼睛”张开最大的时刻
- 定时误差的灵敏度为眼图的斜边之斜率。斜率的绝对值越大，允许的最大定时误差就越小，对定时误差就越敏感
- 图的阴影区的垂直高度表示信号幅度畸变范围
- 图中央的横轴位置为判决门限电平
- 在抽样时刻，上下两阴影区间距的一半为噪声容限（或称噪声边际），即若噪声瞬时值超过这个容限，就可能发生错误判决



4.6 部分响应系统

● 无码间干扰的基带系统特性比较

基带系统	码间干扰	冲激响应的衰减振荡	对定时的要求	频带利用率	能否实现
理想低通	无	较大	很严格	$2Bd/Hz$	不能
升余弦	无	较小	要求较低	$1Bd/Hz$	能

➤有效性和可靠性是相互矛盾的。

● 奈奎斯特第二准则

有控制地在某些码元的抽样时刻引入码间干扰，而在其余码元的抽样时刻无码间干扰，就能使频带利用率达到理论上的最大值，同时又可降低对定时精度的要求。通常把满足奈奎斯特第二准则的波形称为部分响应波形。

4.6 部分响应系统

□4.6.1 第 I 类部分响应波形

- 理想低通系统的冲激响应是 $\sin(2\pi f_N t) / (2\pi f_N t)$ 的形式，要加快它的衰减速度，就要使它的分母随时间增大得更快。两个时间上间隔一个码元宽度 T_B 的波形相加，可得：

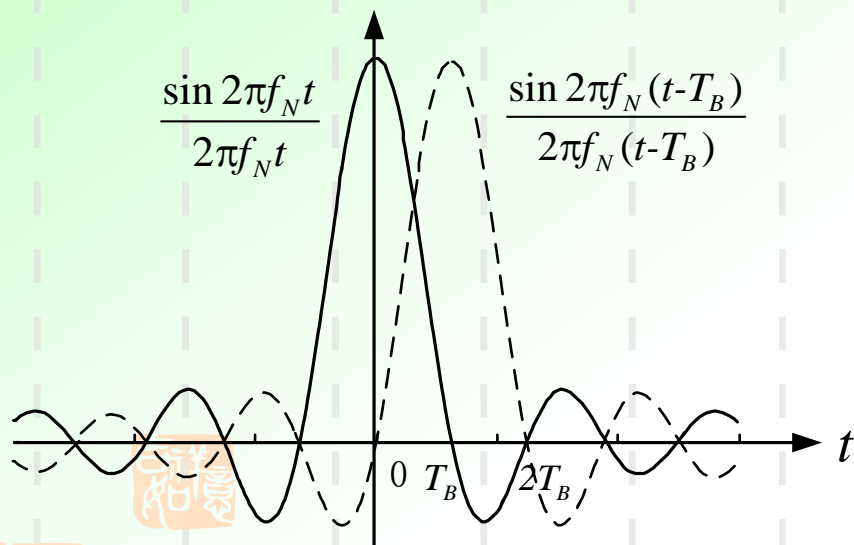
$$g(t) = \frac{\sin 2\pi f_N t}{2\pi f_N t} + \frac{\sin 2\pi f_N (t - T_B)}{2\pi f_N (t - T_B)}$$

- 由上式可以看出合成波的表达式分母中有 t^2 项，从而加快了冲激响应的衰减速度。同时，由于 $g(t)$ 是两个形如 $\sin(2\pi f_N t) / (2\pi f_N t)$ 波形的线性叠加，故带宽与 $\sin(2\pi f_N t) / (2\pi f_N t)$ 相同，频带利用率可达 $2B_d/\text{Hz}$ 。

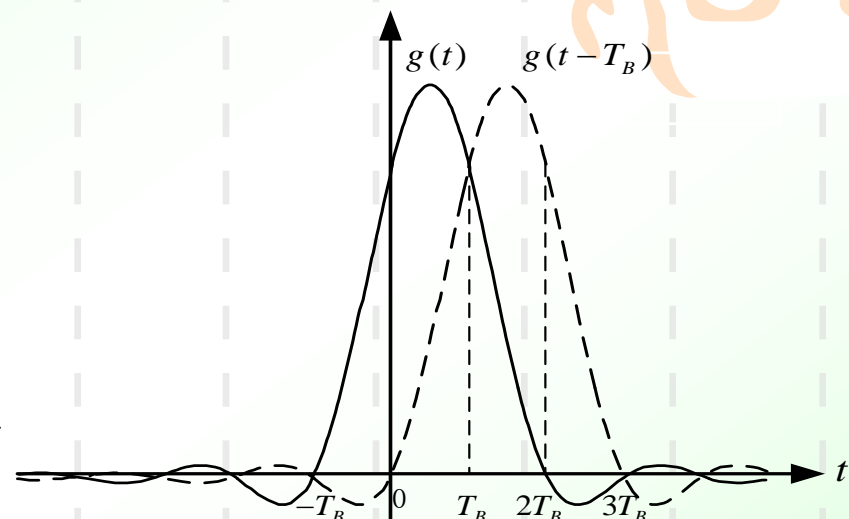
- $g(t)$ 就是第一类部分响应波形

4.6 部分响应系统

● 第一类部分响应系统的冲激响应波形



(a) 相距 T_s 的低通系统冲激响应



(b) 相距 T_s 的部分响应波形

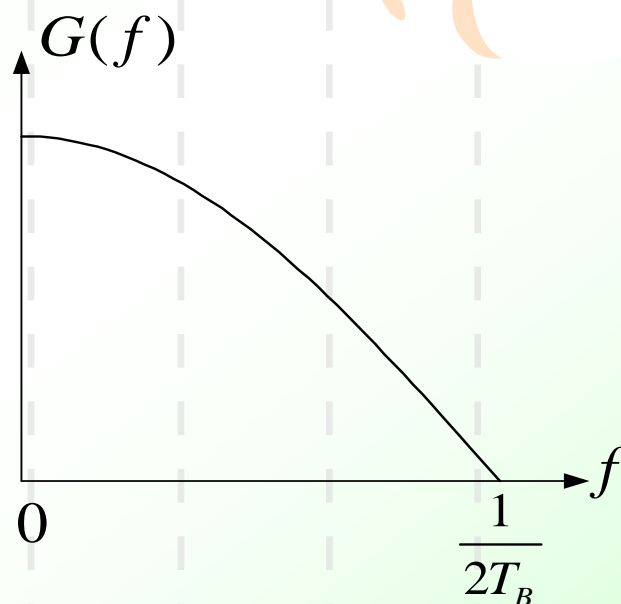
- 可以看出，前一个码元的接收信号在时刻抽样，在下一个码元的抽样时刻，对后面码元有码间干扰，且干扰值与前一个时刻的信号值相同。在以后，具有了相隔的零点，不再对之后码元引起码间干扰。
- 即：部分响应系统存在码间干扰，但这个码间干扰是确定的和已知的，所以是能够被消除的。

4.6 部分响应系统

□ $g(t)$ 的频谱函数

□ 对 $g(t)$ 进行傅里叶变换得:

$$G(f) = \begin{cases} 2 \cos \pi T_B f & |f| \leq \frac{1}{2T_B} \\ 0 & \text{else } f \end{cases}$$



➤ 它具有余弦特性

➤ 带宽与理想矩形滤波器的相同

➤ 频带利用率达到了基带系统在传输二进制序列时的理论极限值。

4.6 部分响应系统



- 例如，设输入的二进制码元序列为 $\{a_n\}$ ， a_n 取值为+1或-1。由图相距 T_B 的部分响应波形可知，当发送码元 a_n 时，接收波形 $g(t)$ 在相应时刻的抽样值 c_n 可由下式确定：

- $$c_n = a_n + a_{n-1}$$

- 或
$$a_n = c_n - a_{n-1}$$

- a_{n-1} 表示第 $n-1$ 个码元在第 n 个码元上叠加的串扰值，也就是 a_{n-1} 对 a_n 的码间干扰。由于串扰值和信码抽样值相等，因此 c_n 的可能取值为2、0、-2，如果前一码元 a_{n-1} 已经判定，则接收端根据抽样值 c_n ，上式便可得到 a_n 的取值。

4.6 部分响应系统

- 缺点

只要有一个码元发生错误，就会影响后面的一系列码元，这称为误码扩散。如果在接收到后，判决时不依赖的值，就能避免出现这种误码扩散现象。

➤ 预编码：为了避免因相关编码而引起的差错传播问题，可以在发送端相关编码之前进行预编码。其规则是：

$$a_n = b_n \oplus b_{n-1}$$

或 $b_n = a_n \oplus b_{n-1}$

其中 \oplus 表示模2和。预编码实际上是把绝对码变换为了相对码。

4.6 部分响应系统

- **相关编码：**把 $\{b_n\}$ 作为发送滤波器的输入码元序列，在接收端得到：

$$c_n = b_n + b_{n-1}$$

- **模2判决：**若对上式进行模2处理，则有

$$[c_n]_{\text{mod}2} = [b_n + b_{n-1}]_{\text{mod}2} = b_n \oplus b_{n-1} = a_n$$

- 这样就不需要预先知道 a_{n-1} ，只需对 c_n 做模2处理后便可得到 a_n ，也不存误码扩散的现象。这是因为，预编码后的信号各抽样值之间解除了相关性。

- 整个上述处理过程可概括为“预编码—相关编码—模2判决”过程

4.6 部分响应系统



- 例如，设为10110011，则有

a_n 1 0 1 1 0 0 1 1

b_{n-1} 0 1 1 0 1 1 1 0

b_n 1 1 0 1 1 1 0 1

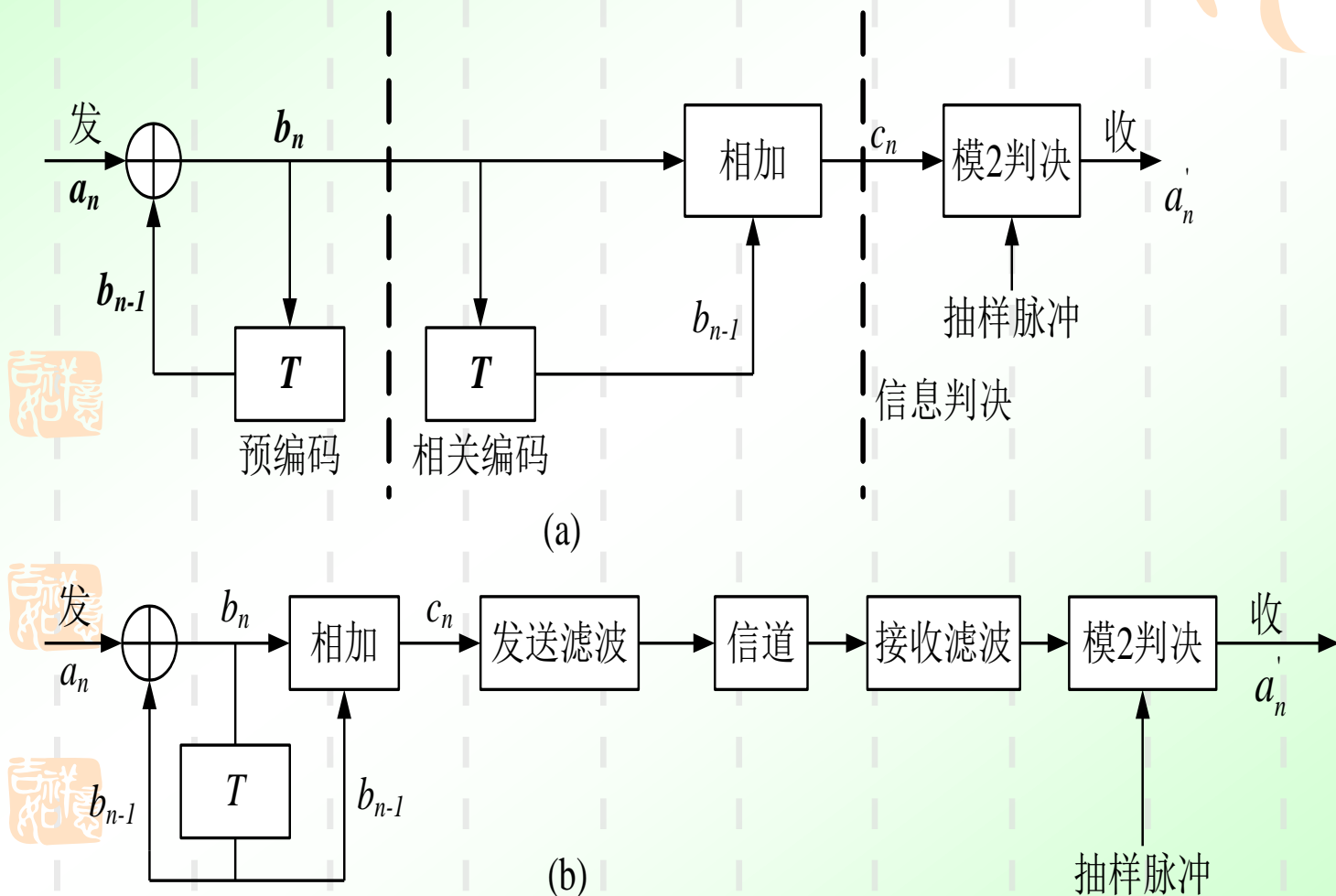
c_n 1 2 1 1 2 2 1 1

$[c_n]_{mod 2}$ 1 0 1 1 0 0 1 1



4.6 部分响应系统

● 第一类部分响应系统框图



□ (a) 原理方框图； (b) 实际系统组成方框图

4.6 部分响应系统

4.6.2 部分响应系统的一般形式

部分响应波形的一般形式是 N 个相继间隔 T_s 的波形 $\sin x/x$

之和，即：

$$g(t) = \sum_{i=1}^N R_i \frac{\sin 2\pi f_N [t - (i-1)T_B]}{2\pi f_N [t - (i-1)T_B]}$$

其中 R_i 为加权系数，取值为正、负整数（包括0）

这里，预编码运算为 $a_k = R_1 b_k + R_2 b_{k-1} + \dots + R_N b_{k-(N-1)}$

（模“ L ”加）

在信道中完成的相关编码为 $C_k = R_1 b_k + R_2 b_{k-1} + \dots + R_N b_{k-(N-1)}$

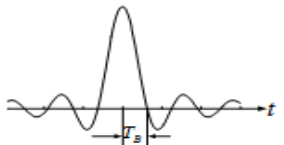
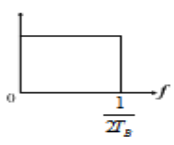
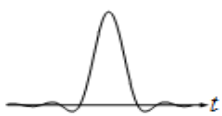
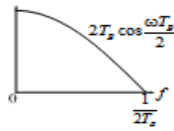

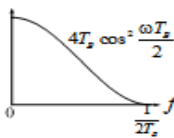

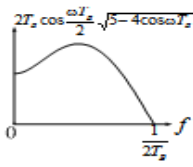

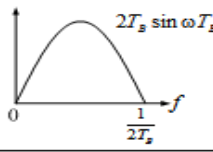
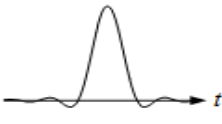
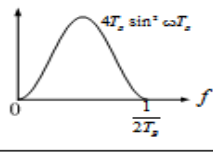
（算术加）

在接收端对 C_k 作模 L 处理，则有

$$[C_k]_{\text{mod } L} = [R_1 b_k + R_2 b_{k-1} + \dots + R_N b_{k-(N-1)}]_{\text{mod } L} = a_k$$

4.6 部分响应系统

● 部分响应波形的比较

类别	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	$g(t)$	$ G(f) , f \leq 1/2T_B$	二进制输入时 c_n 的电平数
0	1							2
I	1	1						3
II	1	2	1					5
III	2	1	-1					5
IV	1	0	-1					3
V	-1	0	2	0	-1			5



4.6 部分响应系统



- 从表中看出，各类部分响应波形的频谱在处为零。其中第I类和第IV类部分响应系统的频谱分别为余弦和正弦特性，且预编码电路只有两项相加，结构简单；输出电平数均为3个，抗噪声性能较好，在实际中应用广泛。
- 当输入数据为L进制时，部分响应波形的相关编码电平数要超过L个，如第I类和第IV类部分响应的相关编码电平数为 $2L-1$ 个，而第II、III、V类部分响应的相关编码电平数为 $2L+1$ 个。因此部分响应系统的抗噪声性能将比理想低通系统的要差。这也是为获得部分响应系统的优点所付出的代价。

4.7 位同步



- **位同步目的：** 确定接收码元起始时刻，以保证正确检测和判决所接收的码元。
- **位同步方法：** 从接收码元的起止时刻产生一个码元同步脉冲序列，或称**位同步信号**、码元定时脉冲或码元同步信号。
- **码元同步方法分类：**

◆ **外同步法：** 它是一种利用辅助信息同步的方法，即需要在传输的信号中另外加入包含码元定时信息的导频信号。

◆ **自同步法：** 它不需要辅助同步信息，而是直接从接收的信号序列中提取出码元定时信息。显然，这种方法要求接收信号中含有码元定时信息。



4.7 位同步

□ 4.7.1 外同步法

- 常用的外同步法:在发送信号中插入频率为码元速率 f_b (或 R_B)，或者码元速率的整数倍的同步信号。在接收端利用一个窄带滤波器将其分离出来，得到码元同步信号。
- 优缺点: 优点是设备较简单，缺点是需要占用一定的频带宽带和发送功率。
- 插入码元同步信号的方法:
 - 时域: 连续插入; 增加“同步头”
 - 频域: 在信息码元频谱之外占用一段频谱用于传输同步信息
 - ◆ 利用信息码元频谱中的“空隙”处，插入同步信息
- 外同步法目前采用不多

4.7 位同步



□4.7.2 自同步法

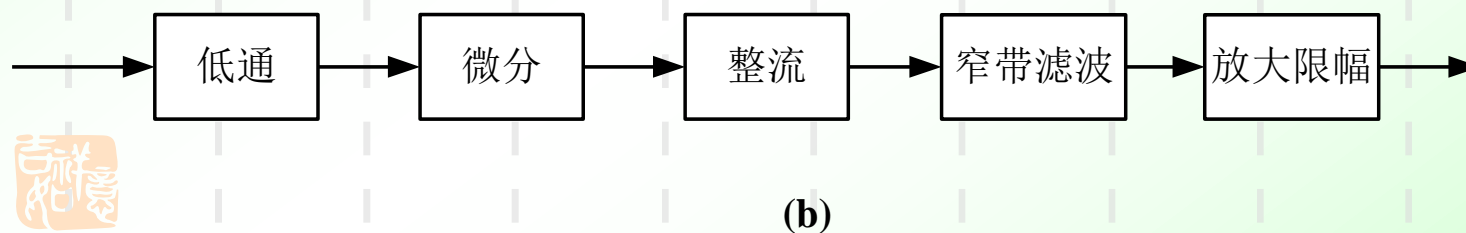
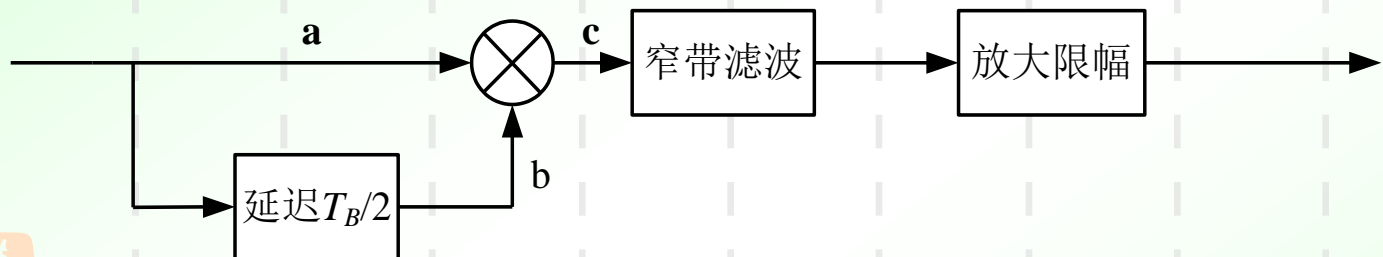
- 自同步法分类:

- 开环位同步法: 对于等概的二进制不归零码元序列, 其中没有离散的码元速率频谱分量, 不能直接从接收信号中得到码元同步信号。如果对接收信号进行某种非线性变换, 就能够使频谱中产生离散的码元速率分量, 从而提取出码元定时信息。
- 闭环同步中: 则通过比较本地时钟周期和输入信号码元周期, 将本地时钟锁定在输入信号上。闭环法更为准确, 但是也更为复杂。

4.7 位同步

开环位同步法

- 两个具体方案:

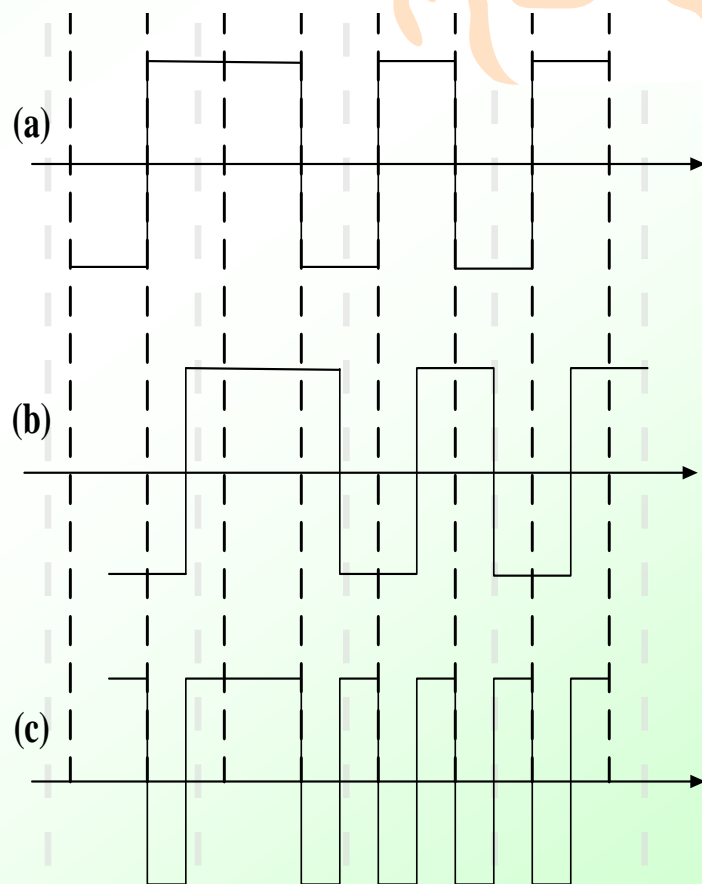


- (a) 延迟相乘法; (b) 微分整流法

4.7 位同步

□ 延迟相乘法输入输出波形:

- 延迟相乘的方法就是做非线性变换。
- 延迟相乘后码元波形的后半永远正值；而前半则当输入状态有改变时为负值。因此，变换后的码元序列的频谱中就产生了码元速率的分量。
- 延迟时间等于码元时间一半时，码元速率分量最强



4.7 位同步



□ 微分整流法:

- 它采用的非线性电路是一个微分电路，用微分电路去检测矩形码元脉冲的边沿。
- 微分电路的输出是正负窄脉冲，经过整流后得到正脉冲序列，此序列的频谱中就包含有码元速率的分量。
由于微分电路对于宽带噪声很敏感，所以在输入端加一个低通滤波器。
- 但是，低通滤波器的加入会使码元波形的边沿变缓，使微分后的波形上升或下降变慢，所以应该合理选取低通滤波器的截止频率

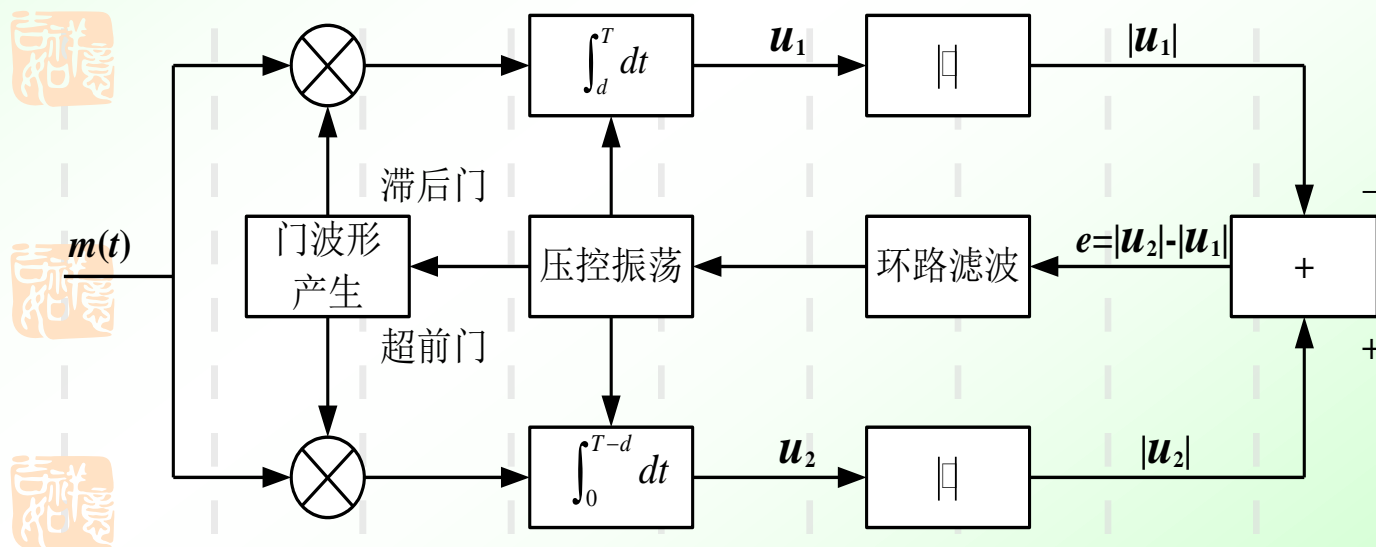


4.7 位同步

□ 闭环位同步法

➤ 基本原理：将接收信号和本地产生的码元定时信号相比较，使本地产生的定时信号和接收码元波形的转变点保持同步。

➤ 超前/滞后期同步器

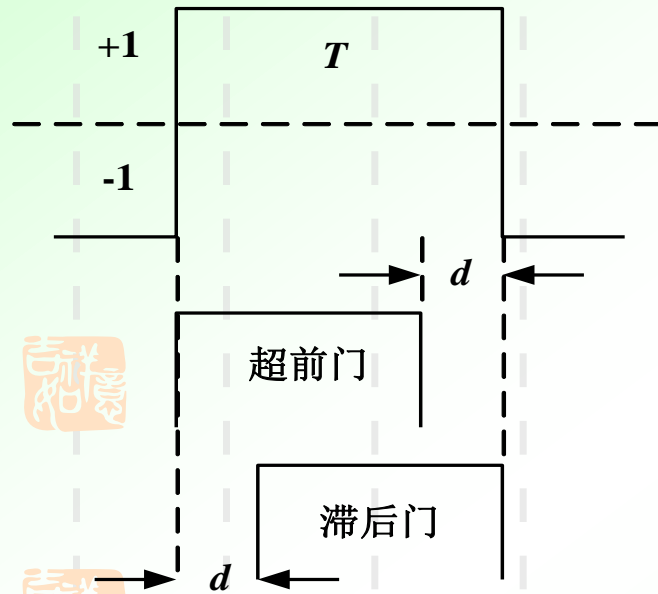


超前/滞后期同步原理方框图

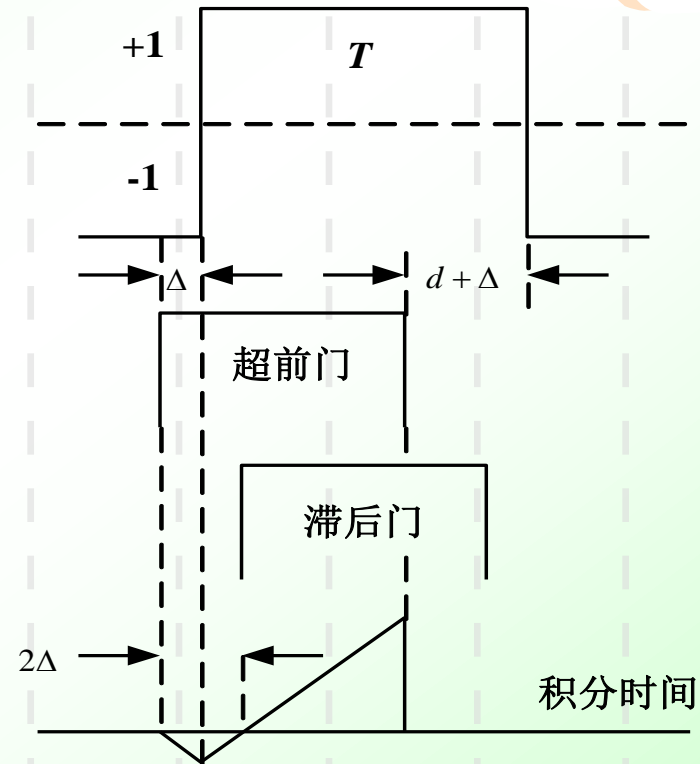
4.7 位同步



➤ 工作原理:



(a)



(b)

(a) 同步状态; (b) 超前状态

4.7 位同步



➤ 存在的问题:

- 若它没有跳边沿，则无论有无同步时间误差，超前门和滞后门的积分结果总是相等，这样就没有误差信号去控制压控振荡器，故不能使用此法取得同步。这个问题在所有自同步法的码元同步器中都存在，在设计时必须加以考虑。此外，由于两个支路积分器的性能也不可能做得完全一样。这样将使本来应该等于零的误差值产生偏差；如果接收码元序列中较长时间没有突跳边沿时，此误差值偏差持续地加在压控振荡器上，使振荡频率持续偏移，从而使系统失去同步。



4.8 均衡技术

- 均衡器的概念

- 在数字基带系统输出端加入一种可调（或不调）的滤波器，可以减小码间干扰的影响。这种起补偿作用的滤波器统称为均衡器。

- 均衡器的分类

- ◆ 时域均衡器（TDE）：是直接从事时间响应角度分析并设计的均衡器，使包括均衡器在内的整个数字基带传输系统满足或接近无码间干扰条件。分两大类：线性均衡器和非线性均衡器。

- ◆ 频域均衡器（FDE）：用幅频特性或相频特性对信道特性进行补偿，使数字基带系统的总特性满足奈奎斯特第一准则的要求。



4.8 均衡技术

□ 4.8.1 线性均衡

- 线性均衡器的结构简单，它是时域均衡器的基础。实现方式主要是横向滤波器，也可以用格型滤波器。
- 设原基带系统传输特性为 $G(f)$ ，在插入时域均衡器 $T(f)$ 后，系统总的传输特性为

$$G'(f) = T(f)G(f)$$

- 使其满足奈奎斯特第一准则，即

$$\sum_i G'(f + \frac{i}{T_B}) = \sum_i G(f + \frac{i}{T_B})T\left(f + \frac{i}{T_B}\right) = T_B \quad |f| \leq \frac{1}{2T_B}$$

- 此时，包括 $T(f)$ 在内的总特性 $G'(f)$ 将可消除码间干扰。

- 取 $T(f)$ 为以 $1/T_B$ 为周期的周期函数，则 $T(f + \frac{i}{T_B}) = T(f)$



4.8 均衡技术

- 又有:

$$T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-j2n\pi T_B f} \quad |f| \leq \frac{1}{2T_B}$$

- 既然 $T(f)$ 是周期函数, 则可用傅里叶级数来表示, 即

$$T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-j2n\pi T_B f} \quad |f| \leq \frac{1}{2T_B}$$

- 其中

$$C_n = T_B \int_{-\frac{1}{2T_B}}^{\frac{1}{2T_B}} T(f) e^{j2n\pi T_B f} df = T_B \int_{-\frac{1}{2T_B}}^{\frac{1}{2T_B}} \frac{T_B}{\sum_i G(f + \frac{i}{T_B})} e^{j2n\pi T_B f} df$$

- 由上式看出, 傅里叶系数 C_n 由 $G(f)$ 决定, 那么时域均衡器 $T(f)$ 也由 $G(f)$ 唯一确定。

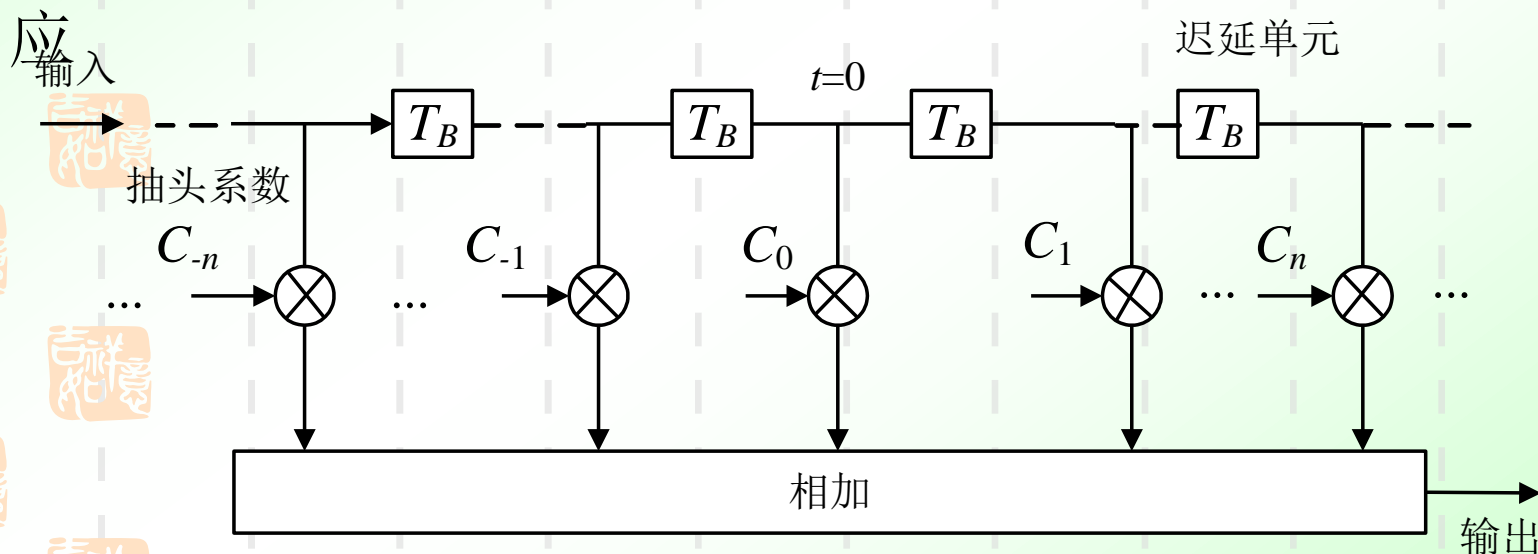


4.8 均衡技术

- 再求其傅里叶反变换，即可得其单位冲激响应 $g_T(t)$ 为

$$g_T(t) = F^{-1}[T(f)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(t-nT_B)$$

- 由上式看出，这里的 $g_T(t)$ 是下图所示网络的单位冲激响应



- 该均衡器由无限多个按横向排列的迟延单元及抽头系数组成，所以称为横向滤波器

4.8 均衡技术

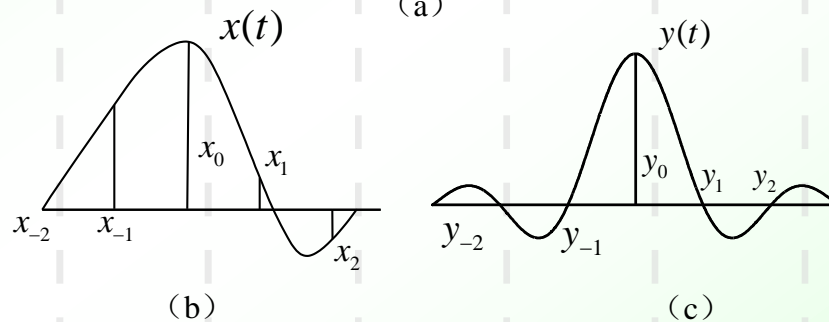
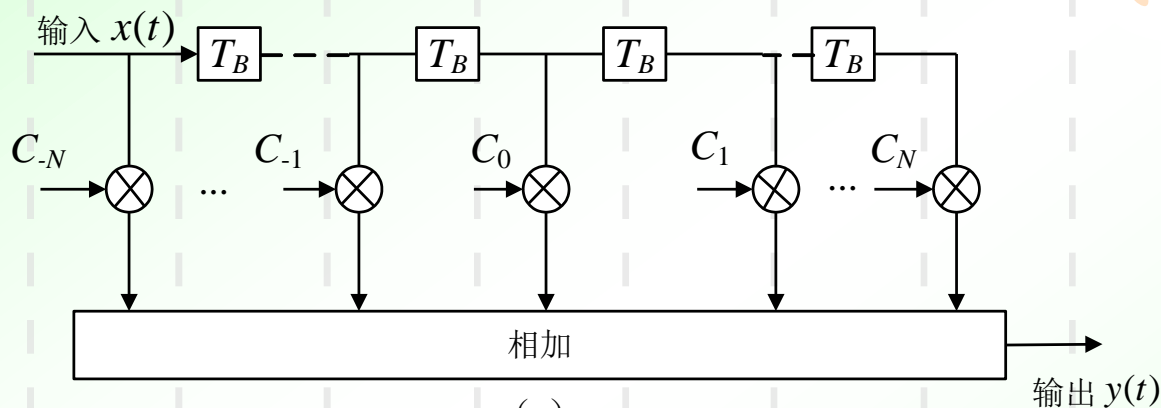
□ 横向滤波器特性

- ◆ 横向滤波器的特性将取决于各抽头系数 C_n 。
- ◆ 如果 C_n 是可调整的，则图中所示的滤波器是通用的；特别当 C_n 可自动调整时，则它能够适应信道特性的变化，可以动态校正系统的时间响应。
- ◆ 理论上，无限长的横向滤波器可以完全消除抽样时刻上的码间串扰，但实际中是不可实现的。因为，不仅均衡器的长度受限制，并且系数 C_n 的调整准确度也受到限制。如果 C_n 的调整准确度得不到保证，即使增加长度也不会获得显著的效果。
- ◆ 理论和实际都证明，有限长横向滤波器也能有效减少码间干扰的影响。



4.8 均衡技术

- 设有限长横向滤波器由 $2N$ 个延迟单元、 $2N+1$ 个抽头系数及1个加法器组成，如图：



- 其单位冲激响应为：

$$g_e(t) = \sum_{i=-N}^N C_i \delta(t-iT_B)$$

4.8 均衡技术

- 横向滤波器的数学表示式

➤ 则均衡后的输出波形 $y(t)$ 为:

$$y(t) = x(t) * g_e(t) = \sum_{i=-N}^N C_i x(t - iT_B)$$

- 在抽样时刻 $kT_B + t_0$, $y(t)$ 幅值为:

$$y(t_0 + kT_B) = \sum_{i=-N}^N C_i x(t_0 + kT_B - iT_B) = \sum_{i=-N}^N C_i x[t_0 + (k-i)T_B]$$

- 将其简写为

$$y_k = \sum_{i=-N}^N C_i x_{k-i}$$

➤ y_k 均衡器输出在第 k 个抽样时刻上的响应, 其中 y_0 是需要得到的信号响应, 而 $y_k (k \neq 0)$ 都是对其它时刻信号的码间干扰, 我们希望通过调整使其等于或接近零。

- 横向滤波器抽头系数的调整方法: 迫零算法和均方误差算法

4.8 均衡技术

□ 迫零算法

- 迫零算法调整抽头系数的依据为

$$y_k = \sum_{i=-N}^N C_i x_{k-i} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}$$

- 当 $|k| > N$ 时， y_k 也可能为非零值，构成均衡器输出端的残留码间干扰。即，有限长横向滤波器不可能完全消除码间干扰，只能消除对前后 N 个抽样时刻上的码间干扰。

- **峰值畸变**：衡量迫零滤波器的均衡效果

$$D = \frac{1}{y_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |y_k|$$

- D 表示在所有抽样时刻得到的码间干扰之和与时刻上的抽样样值之比，理想情况下， $D=0$ 。适当选择横向滤波器各抽头系数，可迫使 $D \rightarrow 0$ 。



4.8 均衡技术

- 【例4.1】** 某数字基带传输系统冲激响应在各抽样时刻的抽样值分别为 $x_{-2} = -0.1, x_{-1} = 0.2, x_0 = 1.0, x_1 = -0.3, x_2 = 0.1$ ， $|k| > 2$ 时， $x_k = 0$ 。若将该系统与三抽头迫零均衡器相级联，求出此横向滤波器的抽头系数，并计算出均衡前后的峰值畸变值。

- 【解】** (1) 求抽头系数，有

$$y_k = \sum_{i=-1}^1 C_i x_{k-i} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} \\ x_2 & x_1 & x_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

4.8 均衡技术

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.2 & -0.1 \\ -0.3 & 1 & 0.2 \\ 0.1 & -0.3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- 解联立方程，求得： $C_{-1}=-0.16, C_0=0.898, C_1=0.284$
- (2) 求均衡后在各抽样时刻的抽样值：

- 方法1:

$$\begin{bmatrix} x_{-2} & x_{-3} & x_{-4} \\ x_{-1} & x_{-2} & x_{-3} \\ x_0 & x_{-1} & x_{-2} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{-3} \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_{-2} & x_{-3} & x_{-4} \\ x_{-1} & x_{-2} & x_{-3} \\ x_0 & x_{-1} & x_{-2} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} \\ x_2 & x_1 & x_0 \\ x_3 & x_2 & x_1 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_{-1} \\ C_0 \\ C_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{-3} \\ y_{-2} \\ y_{-1} \\ y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

4.8 均衡技术

■ 方法2:

x_{-2}	x_{-1}	x_0	x_1	x_2		
		C_{-1}	C_0	C_1		
$C_{-1}x_{-2}$	$C_{-1}x_{-1}$	$C_{-1}x_0$	$C_{-1}x_1$	$C_{-1}x_2$		
	C_0x_{-2}	C_0x_{-1}	C_0x_0	C_0x_1	C_0x_2	
	C_1x_{-2}	C_1x_{-1}	C_1x_0	C_1x_1	C_1x_2	C_1x_{-2}
y_{-3}	y_{-2}	y_{-1}	y_0	y_1	y_2	y_3

■ 把相应的数值代入上式, 可得: $y_{-3}=0.016, y_{-2}=0.122, y_{-1}=0, y_0=1, y_1=0, y_2=0.005, y_3=0.028$ 。

■ 均衡前的峰值畸变:

$$D_i = \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{k=-1 \\ k \neq 0}}^1 |x_k| = 0.1 + 0.2 + 0.3 + 0.1 = 0.7$$

■ 均衡后的峰值畸变:

$$D_0 = \frac{1}{y_0} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |y_k| = 0.016 + 0.122 + 0.005 + 0.028 = 0.171$$

4.8 均衡技术



- 由本例题可看出，横向滤波器确实能够减小峰值畸变，但仍存有残余的码间干扰。一般来说，有 $2N+1$ 个抽头的横向滤波器只能完全消除前后 N 个抽样时刻的码间干扰。



- 由于均衡器的频率特性是和原基带系统特性是相逆的，当系统幅频特性出现零点（有很大衰减）时，迫零滤波器在此就有很大的幅度增益。在信道存在加性噪声时，迫零滤波器就会有大的输出噪声，导致输出信噪比下降。





4.8 均衡技术

□ 均方误差算法

□ 该算法是在综合考虑均衡器输出端既存在残留码间干扰，又有加性噪声的情况下，以最小均方误差准则来计算横向滤波器的抽头系数。

➤ 设 a_k 为在第 k 个符号间隔内所发送的二进制符号，均衡器输入为 x_k ，均衡后输出的样值序列为 y_k ，此时误差信号为：

$$e_k = a_k - y_k$$

➤ 求均方误差对抽头系数的偏导：

$$\frac{\partial E(e_k^2)}{\partial C_n} = 2E(e_k \frac{\partial e_k}{\partial C_n}) = -2E(e_k \frac{\partial y_k}{\partial C_n}) = -2E(e_k x_{k-n})$$

➤ 令 $\frac{\partial E(e_k^2)}{\partial C_n} = -2E(e_k x_{k-n}) = 0$

➤ 这时， $E(e_k^2)$ 有最小值，可求出最佳抽头系数。

4.8 均衡技术

- 将上式展开:

$$E[(a_k - y_k)x_{k-n}] = E[(a_k - \sum_{m=-N}^N C_m x_{k-m})x_{k-n}] = 0$$

- 于是得到:

$$E(a_k x_{k-n}) = E[(\sum_{m=-N}^N C_m x_{k-m})x_{k-n}] = \sum_{m=-N}^N C_m E(x_{k-m} x_{k-n})$$

- 即 $R_{ax}(n) = \sum_{m=-N}^N C_m R_x(m-n)$

- 利用上式给出的 $2N+1$ 个线性方程, 可求出横向滤波器的抽头系数 C_m 。



4.8 均衡技术

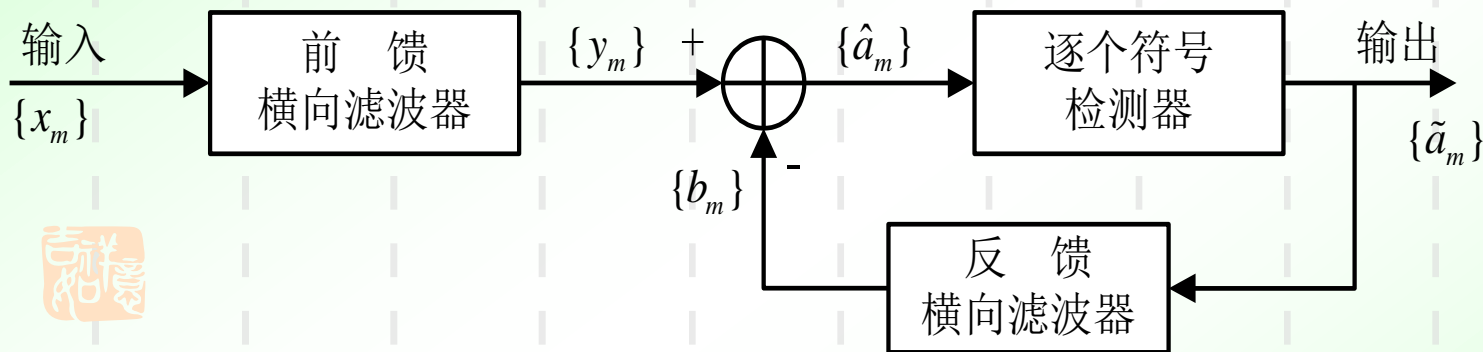
□ 4.8.2 非线性均衡

- 非线性均衡有两类：最大似然序列判决（MLSD）和判决反馈均衡器（DFE）
- 若消息的个数为 M ，码间干扰的符号长度为 L ，则MLSD的复杂度正比于 $ML+1$ ，因此它仅适用于码间干扰长度很小的情况。GSM系统中一般 $L=4$ ，所以MLSD均衡器被广泛应用于GSM。而DFE的复杂度正比于 L ，所以DFE的实现比MLSD更简单，其性能下降也并不明显。

4.8 均衡技术

判决反馈均衡器

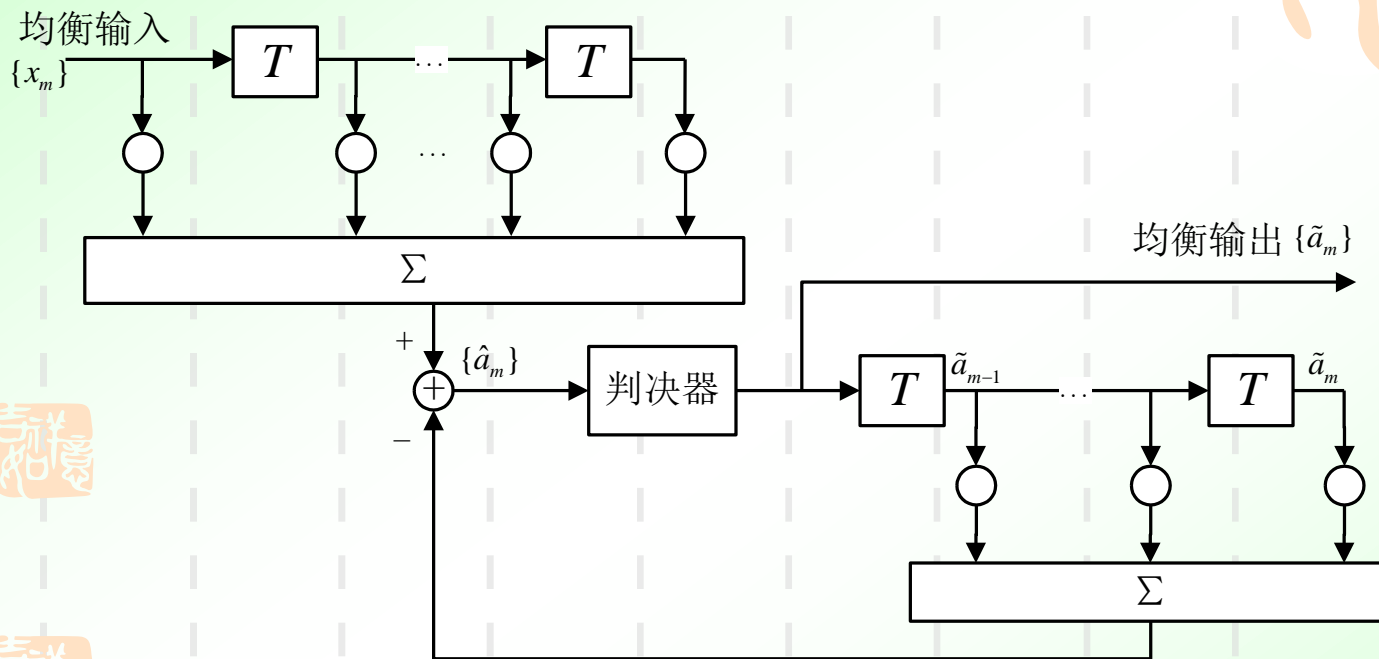
判决反馈均衡器原理框图



反馈滤波器将前面已判决的符号作为输入，用过去已判决符号来估计当前正检测符号的码间干扰，然后将它与前馈滤波器输出相减，从而减小了当前输出符号的码间干扰。

4.8 均衡技术

➤ 用横向滤波器实现判决反馈均衡



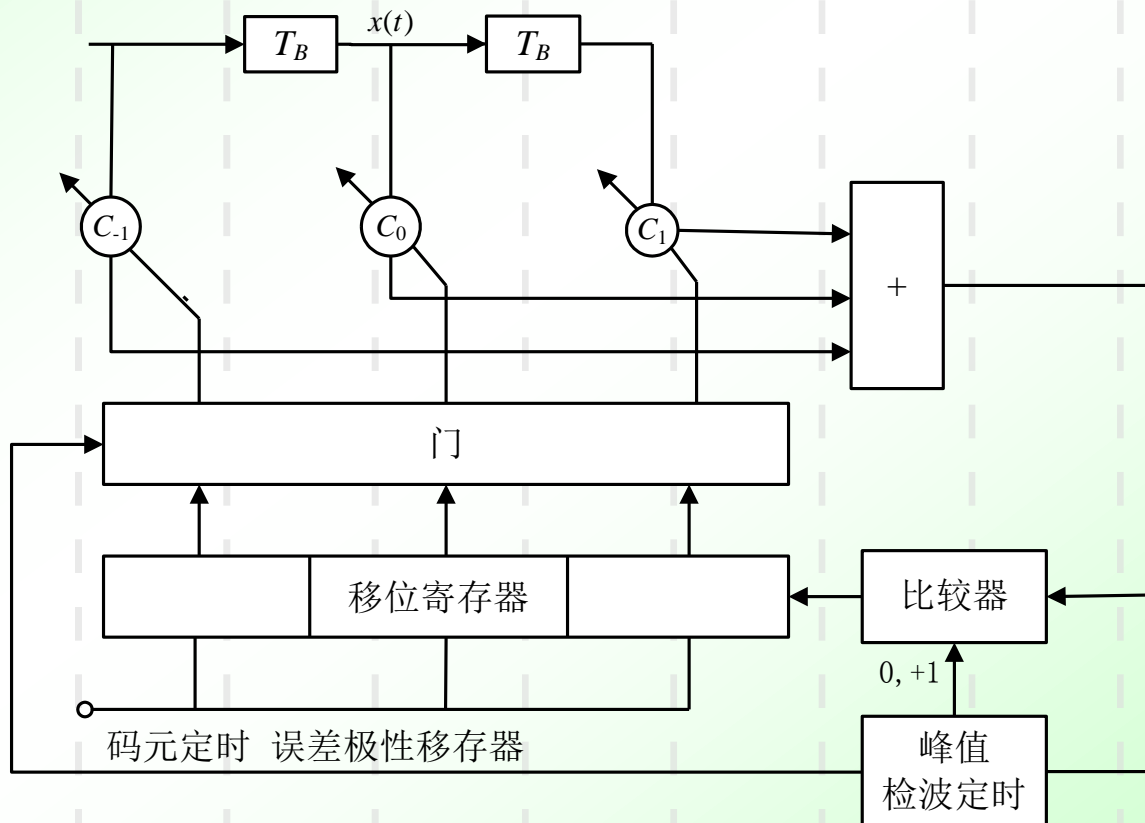
- 此判决反馈均衡器的各抽头系数可以按迫零算法或均方误差算法计算，但均方误差算法应用更普遍。

4.8 均衡技术

4.8.3 均衡器的调整

1. 预置式调整

迫零调整预置式均衡器原理框图





4.8 均衡技术

- 把均衡器的输出送到比较器。比较器的比较电平在0时刻为+1，在其余时刻为0。比较器输出的极性送到误差极性移存器，该移存器每隔左移一位，共有 $(2N+1)$ 级。在完成 $(2N+1)$ 次测试后把门打开，根据误差极性调整抽头系数，加一个增量 Δ 或减一个增量 Δ 。经多次反复调整，使码间干扰趋近于零。
- Δ 愈小，调整精度愈高。但调整的时间愈长。解决这一矛盾的方法就是采用**变步长调整法**，开始把 Δ 取得大些，以减小调整时间，待调整过程基本结束时，再把 Δ 减小，以提高均衡精度。

4.8 均衡技术

- 对于采用均方误差算法的均衡器来说，通常在传输信号以前，发送端要发送一已知的训练序列 $\{a_m\}$ ，以便在收端估计出自相关 $\hat{R}_x(n)$ 及互相关 $\hat{R}_{ax}(n)$ 的值。

$$\hat{R}_x(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k x(m-n)x(m)$$

$$\hat{R}_{ax}(n) = \frac{1}{k} \sum_{m=1}^k x(m-n)a(m)$$

利用上述两个算术平均的估计值来代替统计平均，然后根

据 $R_{ax}(n) = \sum_{m=-N}^N C_m R_x(m)$ 可求出线性均衡器的抽头系数。

4.8 均衡技术



● 2. 自适应调整

➤ 自适应调整不需要专门的测试脉冲，而是从接收的信号中提取调整抽头系数的信息，抽头系数的调整可以紧紧跟随信道变化的特性，所以叫“自适应”。

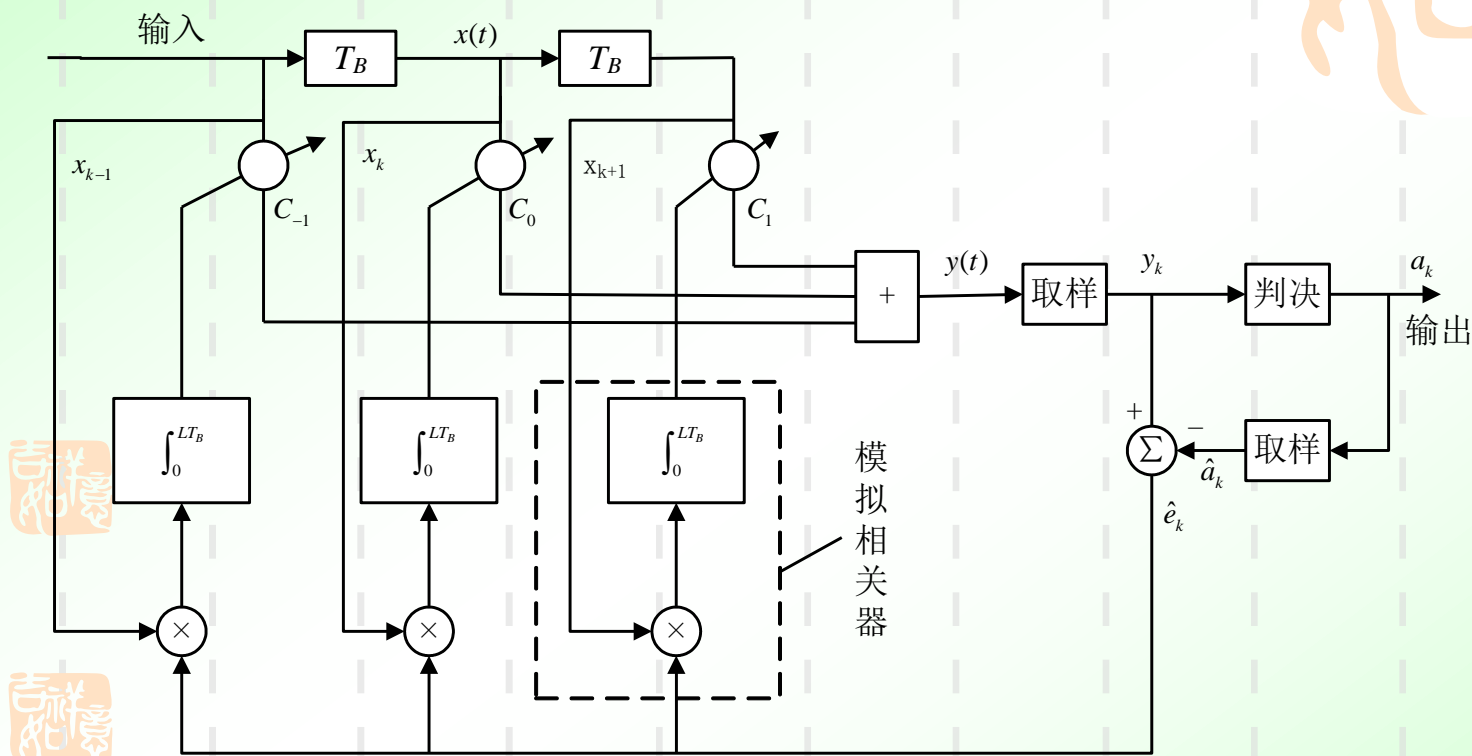
➤ 优点

- ◆ 从接收信号本身提取调整抽头系数的信息，不影响正常的数字通信。
- ◆ 均衡效果好，并能按信道变化而及时调整，在随参信道中必须用自适应均衡器。
- ◆ 在多电平或多相位传输系统中，信道存在非线性或判决电路有误差时，能调节到较好的工作状态。
- ◆ 调整速度快。这对用模拟话路信道传送高速数据时特别重要。



4.8 均衡技术

➤ 采用最小均方差算法的自适应均衡器原理方框图



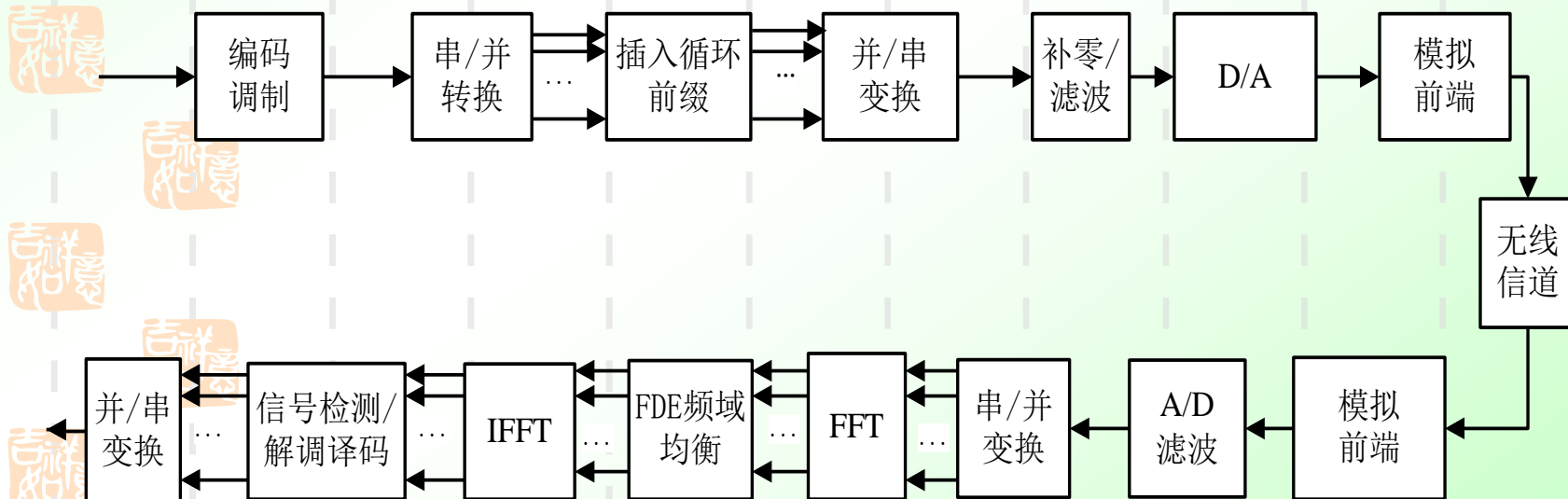
➤ 模拟相关器的输出就是书中式 (4.8-17) 中的 $E(e_k x_{k-n})$ 。根据 $E(e_k x_{k-n})$ 的极性，来调整抽头系数，若 $E(e_k x_{k-n}) > 0$ ，则抽头系数减小一个增量，反之，抽头系数则增加一个增量。

4.8 均衡技术

4.8.4 频域均衡

- 当前移动通信的数据速率往往可达100M/s以上，如采用时域均衡，则抽头数目M可达到几百个，算法复杂度为 $O(M^2)$ ，并且收敛性和稳定性很差。为了提高系统性能，可以采用两种方案：OFDM与SC-FDE，这两种方案都采用了FFT/IFFT变换，算法复杂度降低为 $O(M \log M)$ 。

SC-FDE系统结构框图



4.8 均衡技术



□ OFDM与SC-FDE的技术共同点:

1. 两种系统都采用了FFT/IFFT变换单元，只不过位置不同。OFDM系统中IFFT位于发端，FFT位于收端；而SC-FDE系统中FFT/IFFT都位于收端。其信道补偿都是在频域进行的。
2. 为了消除数据块间干扰(ICI: InterBlock Interference), 两种系统都引入了循环前缀 (CP)，将数据块与信道的线性卷积截断为循环卷积，从而便于独立处理每个数据块，简化了均衡算法结构。

4.8 均衡技术



□与OFDM相比,SC-FDE的技术优势

1. OFDM信号由多个独立调制的正弦波叠加生成，当FFT点数很多时，其峰平比（PAPR）非常高，信号动态范围很大，从而对模拟前端尤其是功放的线性度要求苛刻，而单载波系统的PAPR较小，只随调制星座的信号点动态范围变化。
2. OFDM系统对收/发频率偏差和多普勒效应造成的信道间干扰（ICI: InterChannel Interference）非常敏感，因此频偏补偿和同步算法是OFDM系统的关键模块。而单载波系统对于频偏不敏感，能够容忍较大频偏，更适合于高速运动场合。
3. OFDM系统检测在频域进行，每个子载波单独信道补偿后再解调数据，因此低信噪比的子载波限制了未编码OFDM的系统性能。而SC-FDE系统检测在时域进行，信号经过频域均衡，变换为时域再解调。这样即使有一些子载波SNR很低，但IFFT变换对恶劣信道进行了平均，减弱了深衰落的影响，相当于获得了频率分集增益，从而提高了系统性能。



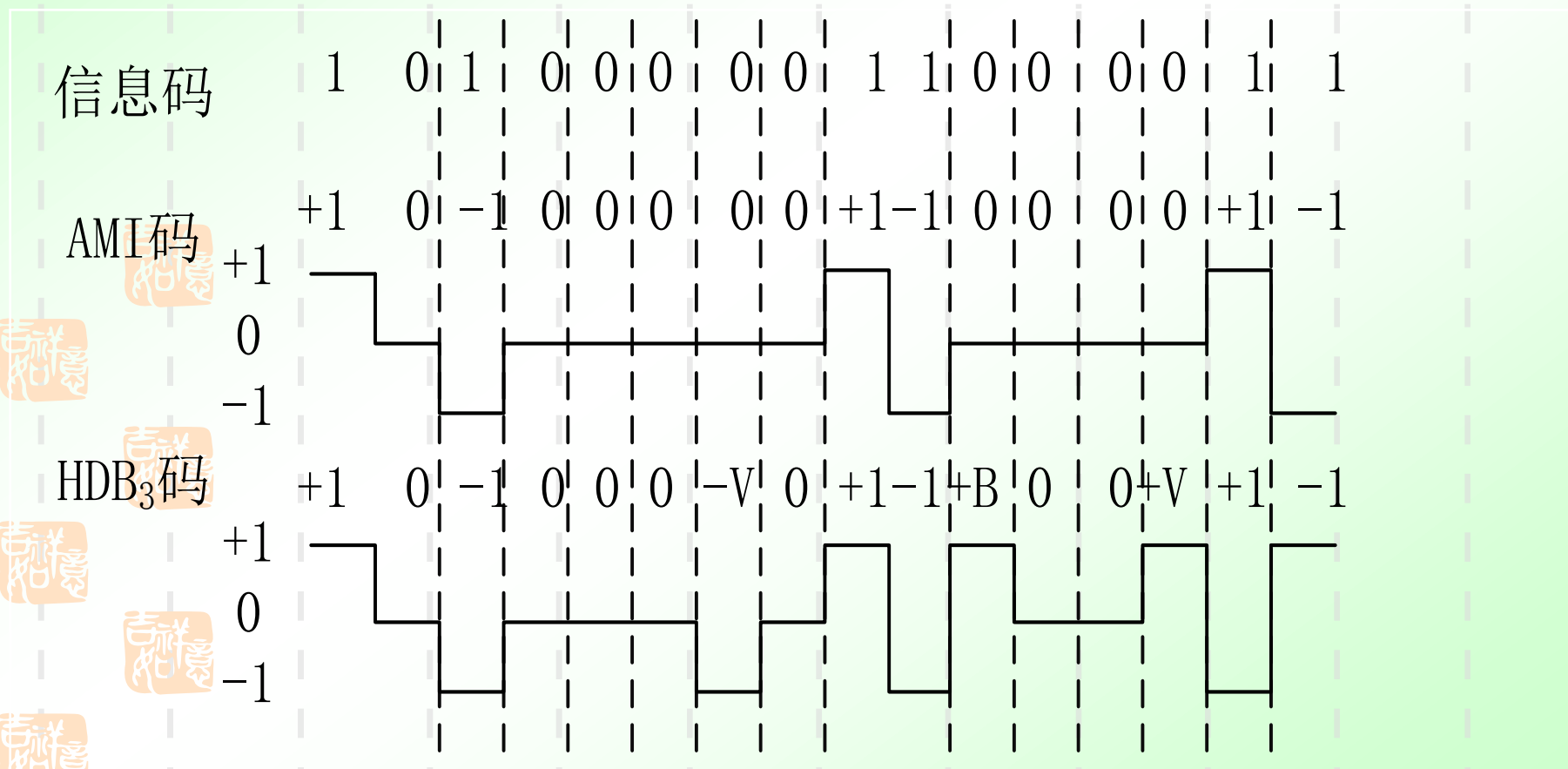
第4章 习题课



习题课



- **【4-1】** 已知信息代码为 **1010000011000011**，求相应的**AMI**码及**HDB3**码，并分别画出它们的波形图。
- 解：各波形图如解图所示：





- **【4-2】** 已知信息代码为 **1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1**，求相应的**AMI码**、**HDB3码**及**双相码**。

➤ 解：信息码： 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1

- AMI码： +1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 -1 1

- HDB3码： +1 0 0 0 +V -B 0 0 -V 0 +1 -1

- 双相码： 10 01 01 01 01 01 01 01 01 01 01 10 10

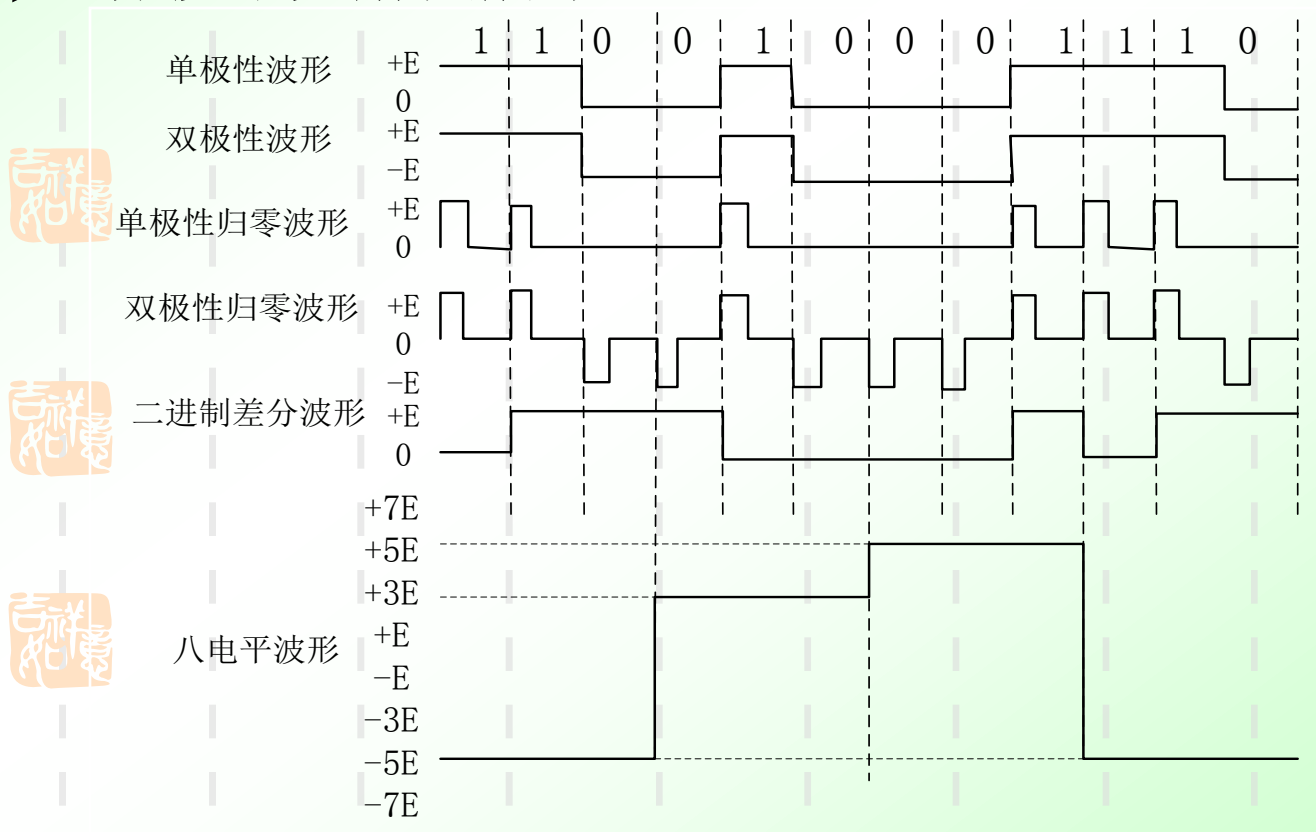


习题课



- 【4-3】 设二进制符号序列为 **110010001110**，试以矩形脉冲为例，分别画出相应的单极性码波形、双极性码波形、单极性归零码波形、双极性归零码波形、二进制差分码波形及八电平码波形。

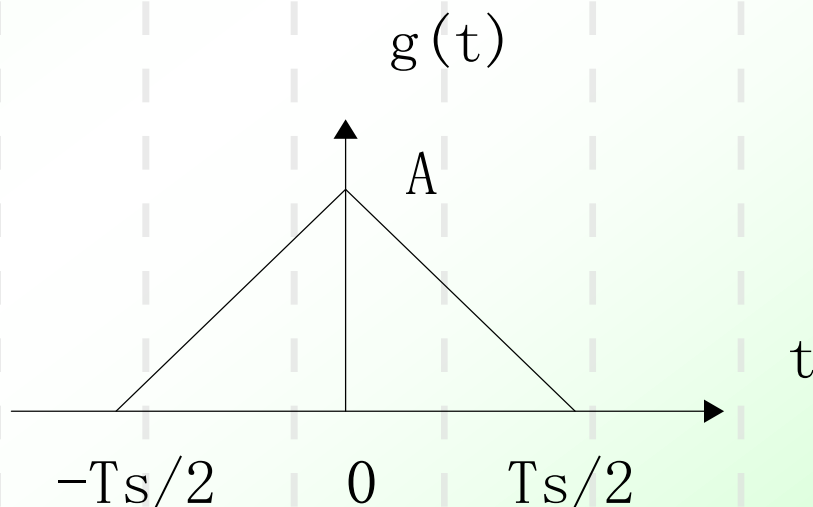
解：各波形如解图所示：



习题课



- **【4-4】** 设某二进制数字基带信号的基本脉冲为三角形脉冲，如题图所示。图中 T_s 为码元间隔，数字信息“1”“0”分别用 $g(t)$ 的有无表示，且“1”和“0”出现的概率相等。
- (1) 求该数字基带信号的功率谱密度；
- (2) 能否用滤波法从该数字基带信号中提取码元同步所需的频率 $f_s=1/T_s$ 的分量？若能，试计算该分量的功率。



习题课

► 解: (1) $P = 0.5, a_1 = 1, a_2 = 0$

$$G(f) = \frac{ATs}{2} Sa^2\left(\frac{\pi f Ts}{2}\right)$$

$$P_s(f) = f_s P(1-P)(a_1 - a_2)^2 G^2(f) + f_s^2 \sum_{m=-\infty}^{\infty} |Pa_1 + (1-P)a_2|^2 G^2(mf_s) \delta(f - mf_s)$$

$$\frac{f_s}{4} * \frac{A^2 Ts^2}{4} Sa^4\left(\frac{\pi f Ts}{2}\right) + \frac{f_s^2}{4} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{A^2 Ts^2}{4} Sa^4\left(\frac{\pi f Ts}{2}\right) \delta(f - mf_s)$$

$$= \frac{A^2 Ts^2}{16} Sa^4\left(\frac{\pi f Ts}{2}\right) + \frac{A^2}{16} \sum_{m=-\infty}^{\infty} Sa^4\left(\frac{m\pi}{2}\right) \delta(f - mf_s)$$

习题课

- (2) 频率 $f_s=1/T_s$ 离散谱分量为:

$$\frac{A^2}{8} \text{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right) \delta(f - f_s) = \frac{2A^2}{\pi^4} \delta(f - f_s) \neq 0$$

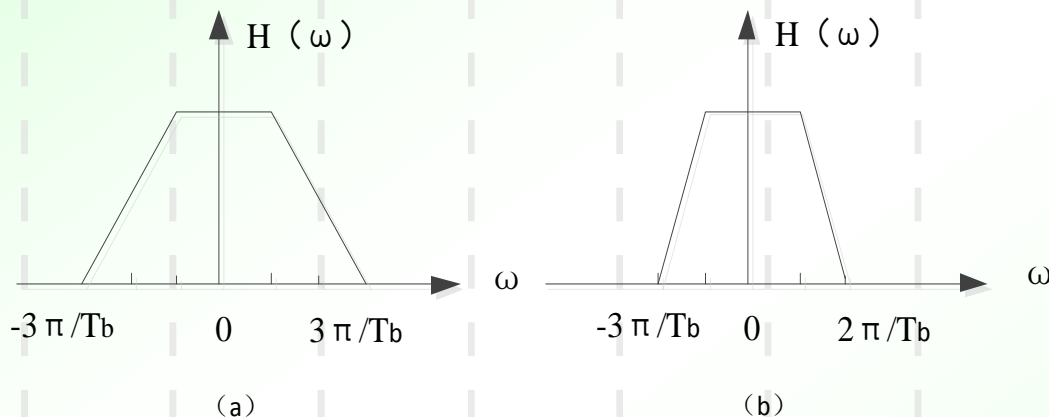
- 所以可以用滤波法从该数字基带信号中提取码元同步所需要的频率 $f_s=1/T_s$ 的分量, 该分量的功率为:

$$S = \frac{2A^2}{\pi} = 0.02A^2$$



习题课

- 【4-5】 设随机二进制脉冲序列码元间隔为 T_b ，经过理想抽样以后，送到如图中的几种滤波器，指出哪种会引起码间串扰，哪种不会引起码间串扰，说明理由。



►解：(a) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{T_b}, \frac{\pi}{T_b}\right]$ 上，前后码元的 $H(\omega)$ 叠加为矩形，所以这种滤波器是无码间串扰；

(b) 在区间 $\left[-\frac{\pi}{T_b}, \frac{\pi}{T_b}\right]$ 上，前后码元的 $H(\omega)$ 叠加不为矩形，所以这种滤波器是有码间串扰；

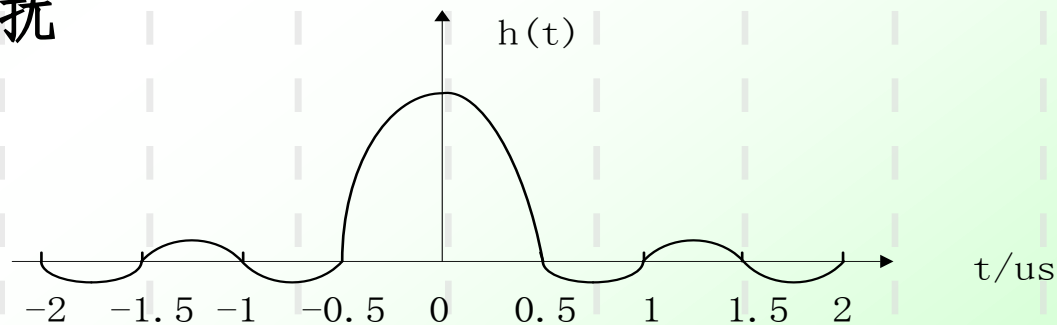
习题课



- **【4-6】** 某基带系统的频率特性是截止频率为**1MHz**、幅度为**1**的理想低通滤波器
- (1) 试根据系统无码间串扰的时域条件求此基带系统无码间串扰的码速率；
- (2) 设此系统传输信息速率为**3Mbps**，能否实现无码间串扰。

➤解: (1) $h(t) = 2 \times 10^6 \text{Sa}(2\pi \times 10^6 t)$

波形如图所示。由图可知，当 $T_s = 0.5 \mu\text{s}/k$ (k 为正整数) 时无码间串扰



习题课

- (2) 设传输独立等概的M进制信号，则

$$R_B = \frac{3}{\log_2^M} (MBd)$$

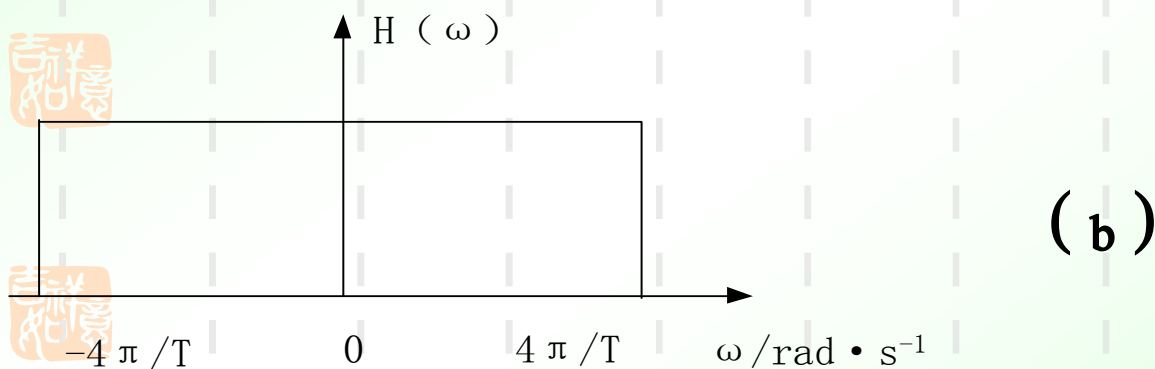
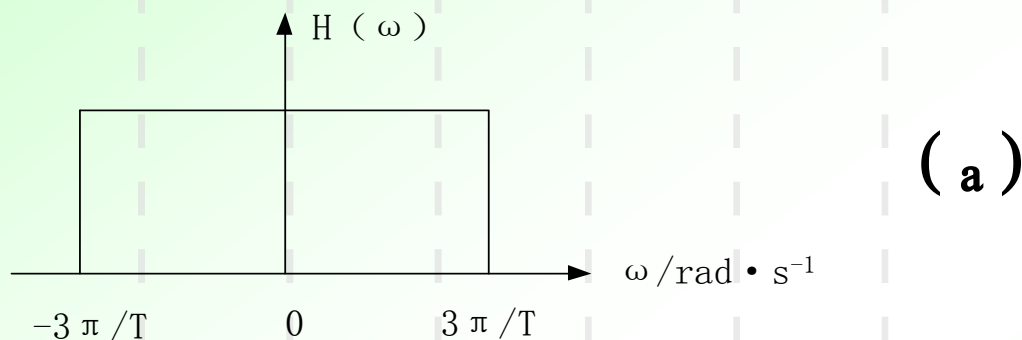
- 令 $\frac{3}{\log_2^M} = \frac{2}{k}$

- 得 $M = 8^{\frac{2}{k}} = 8^n \quad (n=1,2,\dots)$

- 即当采用进制信号时，码速率 $R_B = \frac{1}{n} (MBd)$ ，可以满足无码间串扰条件。

习题课

- 【4-7】 设基带系统的频率特性如题图所示。



(1) 若以 $2/T \text{ Bd}$ 速率传输信号，讨论二进制情况下各系统是否可以实现无码间串扰传输；

(2) 若以 $8/T \text{ bit/s}$ 速率传输信息，讨论多进制情况下各系统是否可以实现无码间串扰传输。

习题课

► 解:

- (1) 图 (a) 为理想矩形, 无码间串扰的最大码元速率为 $R_B=3/T>2/T$, 但 R_B 不是 $2/T$ 的整数倍, 故有码间串扰。

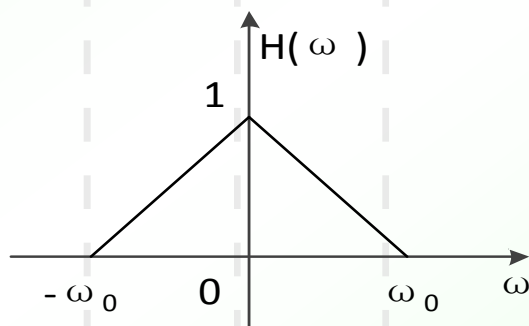
- 图 (b) 为理想矩形, 无码间串扰的最大码元速率为 $R_B=4/T=2\times 2/T$, 故无码间串扰。

- (2) 图 (a): 当传输的信号为256进制时, 信号码元速率为 $1/T$, 无码间串扰的最大码元速率为 $R_B=3/T$, 无码间串扰。

- 图 (b): 当传输的信号为4进制时, 信号码元速率为 $4/T$, 无码间串扰。

习题课

- **【4-8】** 设某基带传输系统具有题图4-4所示的三角形传输函数：
- (1) 当 $R_B = w_0/\pi$ 时，用奈奎斯特准则验证该系统能否实现无码间串扰传输？
- (2) 求该系统接收滤波器输出基本脉冲的时间表达式，并用此来说明(1)中的结论。



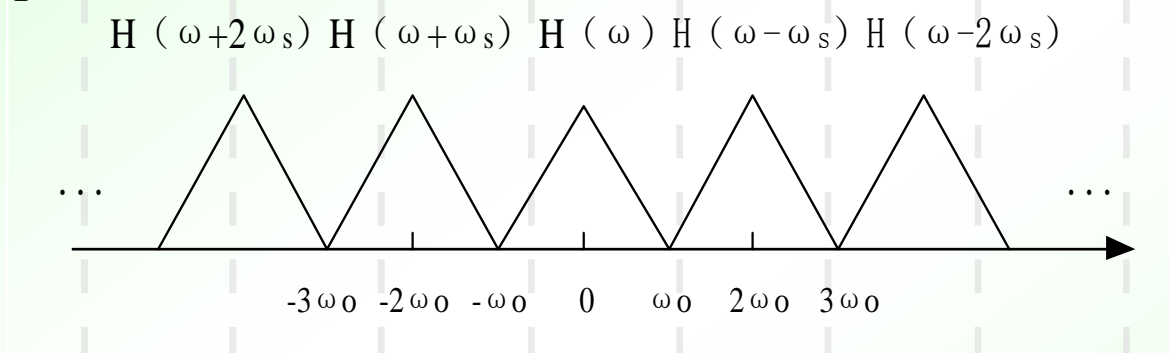
► 解： (1) 方法一：

将 $H(\omega)$ 在频率轴上以 $2\omega_0$ 为间隔切开，由于 $H(\omega)$ 的频率范围为 $(-\omega_0, \omega_0)$ ，故切开、平移、迭加后仍为 $H(\omega)$ ，在范围 $\omega < |\omega_0|$ 内 $H(\omega)$ 不为常数，故系统有码间串扰。

习题课

➤ 方法二:

- 将 $H(\omega)$ 向左右平移 $2\omega_0$ 的整数倍, 如下图所示。可见平移后各图不重合, 相加后不为常数, 故码速率为 ω_0/π 时有码间串扰。



$$(2) \quad h(t) = \frac{\omega_0}{2\pi} Sa^2\left(\frac{\omega_0 t}{2}\right)$$

此即为接收滤波器输出基本脉冲时间表达式。

$$\text{因 } T_s = \frac{1}{R_B} = \frac{\pi}{\omega_0}$$

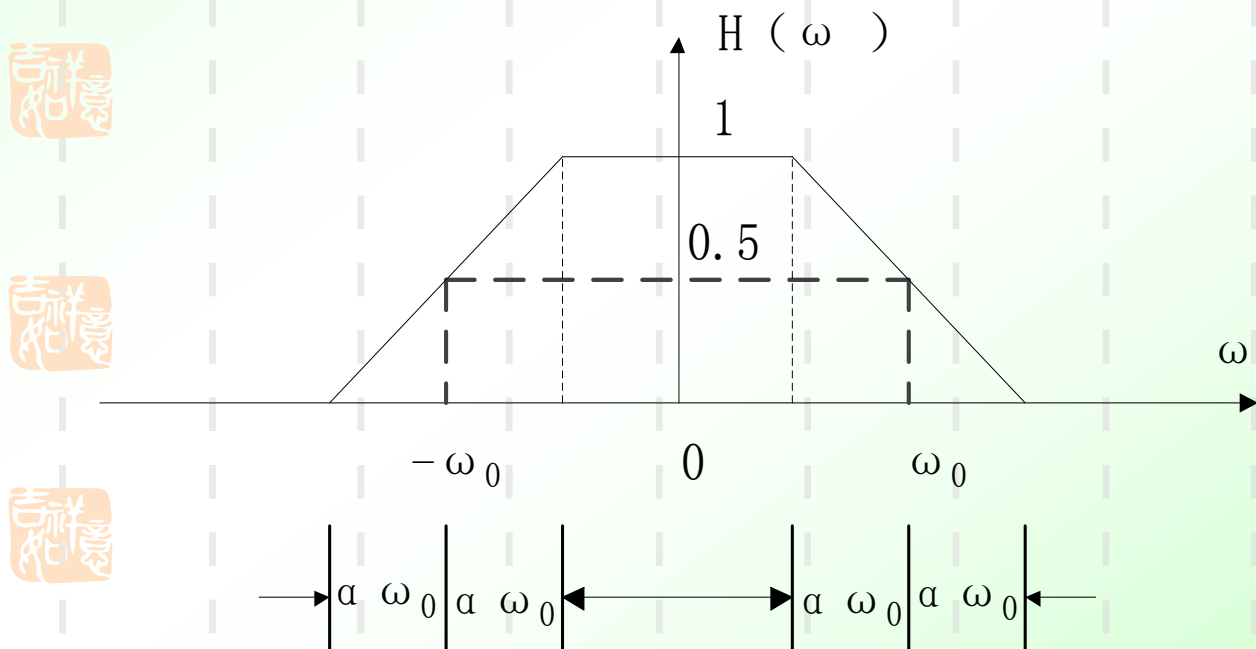
$$\text{所以 } h(kT_s) = \frac{\omega_0}{2\pi} Sa^2\left(\frac{k\pi}{2}\right)$$

可见 $k=0, \pm 1, \pm 3, \dots$ 时, $h(kT_s) \neq 0$, 故有码间串扰。

习题课



- **【4-9】** 设某数字基带系统的传输特性 $H(\omega)$ 如题图4-5所示。其中 α 是某个常数 ($0 \leq \alpha \leq 1$)。
- (1) 试检验该系统能否实现无码间干扰传输？
- (2) 该系统的最大码元传输速率为多少？这时的系统频带利用率为多少？



习题课



► 解:

■ (1) 该频率特性的互补对称频率为 f_0 ，将 $H(f)$ 向左平移 $2f_0$ 的整数倍再相加后在整个频率轴上为常数1，所以该系统可以实现无串扰传输。

■ (2) 互补对称频率的2倍即为无码间串扰的最大码速率，即： $R_B = 2f_0$

■ 此系统占用信道带宽为：

$$B_C = (1 + \alpha)f_0$$

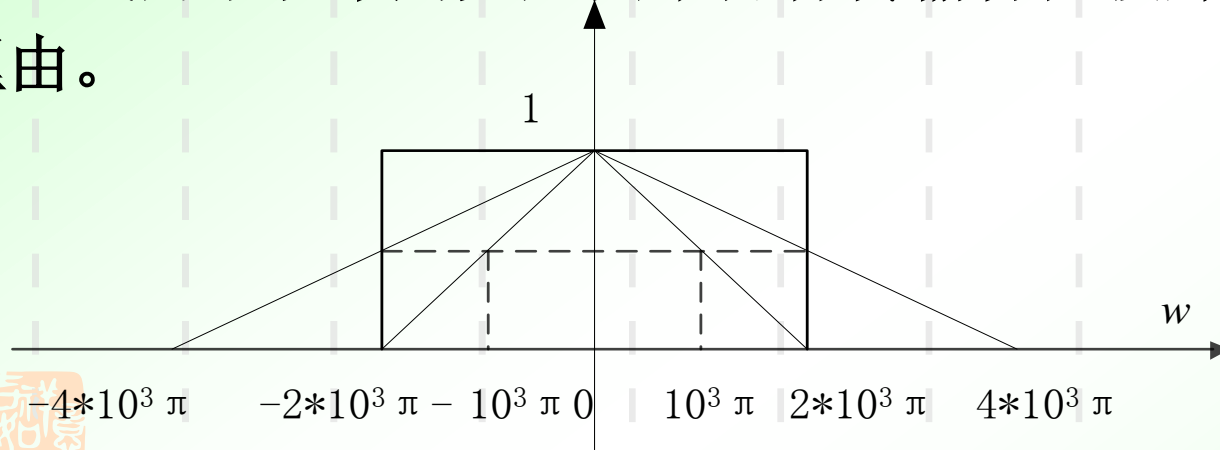
■ 所以系统的频带利用率为：

$$\eta_B = R_B / B_C = 2 / (1 + \alpha)$$

习题课



- 【4-10】为了传输码元速率 $R_B=10^3(\text{Baud})$ 的数字基带信号，试问系统采用如题图中哪种传输特性较好，并说明其理由。



➤解：根据无码间干扰时系统传输函数应 $H(\omega)$ 满足的条件分析，图所示的三种传输函数（a）（b）（c）都能满足以 $R_B=10^3(\text{Baud})$ 的码元速率无码间干扰传输。此时，需要比较三种传输函数在频带利用率、单位冲激响应收敛速度、实现难易程度等方面的特性，从而选出最好的一种传输函数。

习题课

- 1) 传输函数 (a) 的无码间干扰传输速率 R_B 为

$$R_B = 10^3 (\text{Baud})$$

其频带宽度 B 为

$$B = \frac{4 \times 10^3 \pi}{2\pi} = 2 \times 10^3 \quad (\text{HZ})$$

系统的频带利用率 η 为

$$\eta = \frac{R_B}{B} = \frac{10^3}{2 \times 10^3} = 0.5 \text{ Baud/Hz}$$

- 2) 传输函数 (b) 的无码间干扰传输速率 R_B 为

$$R_B = 10^3 (\text{Baud})$$

其频带宽度 B 为

$$B = \frac{2 \times 10^3 \pi}{2\pi} = 10^3 \text{ Hz}$$

习题课



- 系统的频带利用率 η 为

$$\eta = \frac{RB}{B} = \frac{10^3}{10^3} = 1 \text{ Baud/Hz}$$

- 3) 传输函数 (c) 的无码间干扰传输速 $R_B = 10^3 \text{ (Baud)}$

- 其频带宽度 B 为

$$B = \frac{2 \times 10^3 \pi}{2\pi} = 10^3 \text{ Hz}$$

- 系统的频带利用率 η 为

$$\eta = \frac{RB}{B} = \frac{10^3}{10^3} = 1 \text{ Baud/Hz}$$

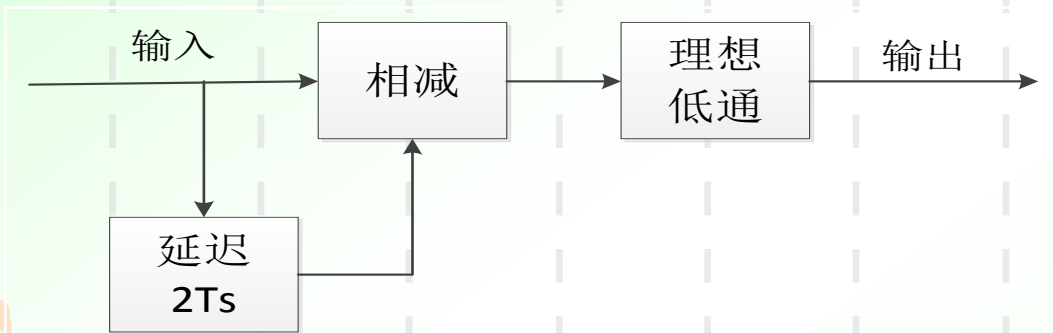


- ▶ 从频带利用率性能方面比较可得：图（b）和（c）的频带利用率为 1Baud/Hz ，大于传输函数（a）的频带利用率。传输函数（b）是理想低通特性，其单位冲激相应 $Sa(x)$ 型，与时间成反比，尾部收敛速度慢且传输函数难于实现。传输函数（c）是三角形特性，其单位冲激相应 $Sa^2(x)$ 型，尾部收敛速度快且传输函数易于实现。
 - 因此，选取传输函数（c）较好。

习题课



- 【4-11】 设一相关编码系统如下图所示。图中，理想低通滤波器的截至频率为，通带增益为。试求该系统的单位冲激效应和频率特性。



➤解：图中的理想低通滤波器的传输函数 $H'(\omega)$ 为

$$H'(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & \text{other } \omega \end{cases}$$

$$h'(t) = Sa\left(\frac{\pi}{T} t\right)$$

其对应的单位冲激相应 $h'(t)$ 为

习题课



- 图中的系统单位冲激响应 $h'(t)$ 为

$$[\delta(t) - \delta(t - 2T_s)] * h'(t) = h'(t) - h'(t - 2T_s) = \text{Sa}\left(\frac{\pi}{T_s}t\right) - \text{Sa}\left(\frac{\pi}{T_s}(t - 2T_s)\right)$$

- 系统传输函数 $H(\omega)$ 为

$$H(\omega) = (1 - e^{-j2\omega T_s}) \bullet H(\omega) = (1 - e^{-j2\omega T_s}) \bullet T_s \bullet G_{\frac{2\pi}{T_s}}(\omega)$$

- 其中

$$G_{\frac{2\pi}{T_s}}(\omega) = \begin{cases} T_s & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_s} \\ 0 & \text{else } \omega \end{cases}$$



习题课



- **【4-12】** 设有一个三抽头的迫零均衡器，输入信号在各个抽样点的值依次为 $X_{-2} = 0, X_{-1} = 0.2, X_0 = 1, X_1 = -0.3, X_2 = 0.1$ ，其余 $X_k = 0$ 。求三抽头的最佳增益。

➤解：根据迫零均衡器的定义，均衡器输出信号的采样值

$$Y_1 = Y_{-1} = 0;$$

$$y_k = \sum_{i=-1}^1 C_i x_{k-i}$$

由公式 得

$$Y_{-1} = C_{-1}X_0 + C_0X_{-1} + C_1X_{-2} = C_{-1} + 0.2C_0 = 0$$

$$Y_0 = C_{-1}X_1 + C_0X_0 + C_1X_{-1} = -0.3C_{-1} + C_0 + 0.2C_1$$

$$Y_1 = C_{-1}X_2 + C_0X_1 + C_1X_0 = 0.1C_{-1} - 0.3C_0 + C_1 = 0$$

习题课



令 $Y_0=1$ ，得方程组：

$$\begin{cases} C_{-1} + 0.2C_0 = 0 \\ -0.3C_{-1} + C_0 + 0.2C_1 = 1 \\ 0.1C_{-1} - 0.3C_0 + C_1 = 0 \end{cases}$$

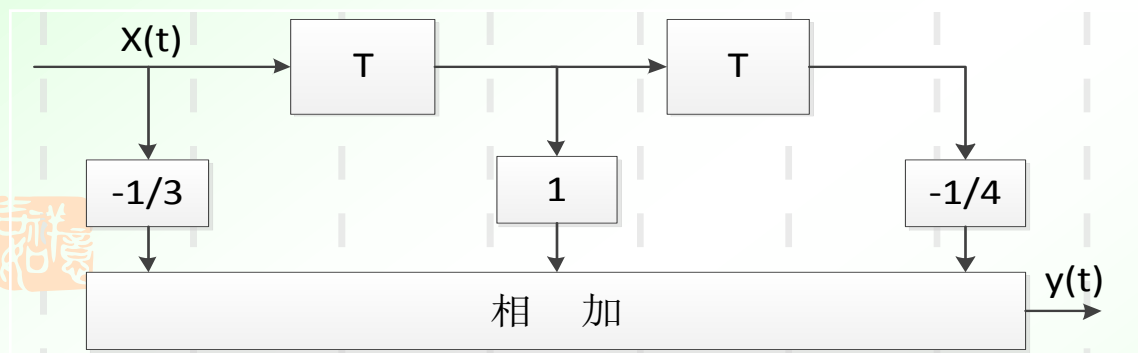
$$C_{-1} = -0.1779, C_0 = 0.8897, C_1 = 0.2847$$

解此方程组可得：

此即为三抽头的最佳增益。

习题课

【4-13】 设有一个三抽头的时域均衡器，如题图所示在抽样点的值依次为 $x_{-2}=1/8$, $x_{-1}=1/3$, $x_0=1$, $x_1=1/4$, $x_2=1/16$ ，在其它抽样点均为0，试求输入波形 $x(t)$ 峰值的畸变值及均衡器输出波形 $y(t)$ 峰值的畸变值。



解： $x(k)$ 的峰值畸变值为 $D_k = \frac{1}{x_0} \sum_{\substack{i=-2 \\ i \neq 0}}^2 |x_i|^2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{37}{48}$

由公式 $y_k = \sum_{i=-N}^N C_i x_{k-i}$

可得： $y_{-3} = C_{-1} x_{-2} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{24}$

习题课



$$\blacksquare \quad y_{-2} = c_{-1}x_{-1} + c_0x_{-2} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{72}$$

$$y_{-1} = c_{-1}x_0 + c_0x_{-1} + c_1x_{-2} = -\frac{1}{3} \times 1 + 1 \times \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = -\frac{1}{32}$$

$$y_0 = c_{-1}x_1 + c_0x_0 + c_1x_{-1} = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + 1 \times 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$y_1 = c_{-1}x_2 + c_0x_1 + c_1x_0 = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \times 1 = -\frac{1}{48}$$

$$y_2 = c_0x_2 + c_1x_1 = 1 \times \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = 0$$

$$y_3 = c_1x_2 = -\frac{1}{4} \times \frac{1}{16} = -\frac{1}{64}$$