第 3 章 运输问题

教学内容：

运输问题的数学模型，运输问题及其基的特征，表上作业法，产销不平衡的运输问题。

运输问题在矿山工程中的应用。

重点：运输问题及其基的特征，表上作业法。

难点：运输问题及其基的特征。

3.1 运输问题的数学模型

1.问题的提出

先考察一个问题，某公司经营一种产品，它下设三个加工厂和四个销售点。三个加工厂 *A1*，*A2*，*A3* 的产量分别为 7 吨，5 吨，9 吨；四个销售点 *B1*，*B2*，*B3*，*B4* 的销量分别为 3 吨，6 吨，6 吨，6 吨。从各加工厂到各销售点的每吨产品的运费如表 3.1 所示，如把产品从产地 A1 运到销地 B1 的单位运价为 5.问该公司应如何调运产品，使总运费最小。

表3.1 单位运价表

产地＼销地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	11	3	9
A_2	1	10	2	6
A_3	8	4	7	5

解：设 x_{ij} 为从加工厂 Ai 到销售点 Bj 的产品运输量（ i=1，2，3；j=1，2，3，4），将产销量和所有可能安排的运输量列于表 3.2，

表3.2 产销平衡表

销地＼产地	B_1	B_2	B_3	B_4	产量
A_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	7
A_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	5
A_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}	9
销量	3	6	6	6	(x_{ij})

则上述问题可形成一个数学问题：

$$\min z = 5x_{11}+11x_{12}+3x_{13}+9x_{14} + x_{21}+10x_{22}+2x_{23}+6x_{24} + 8x_{31}+4x_{32}+7x_{33}+5x_{34}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=5 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=3 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=6 \end{cases}$$

$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=6$$

$$x_{14}+x_{24}+x_{33}=6$$

$$x_{ij}\geq 0,\ \forall\ i,j$$

推广到一般情况，运输问题可描述为：某种物资有 *m* 个产地（也称为“发点”或“源”）和 *n* 个销地（也称为“收点”或“汇”），第 *i* 个产地 *Ai* 的产量为 *ai*，*i* =1，2，…，*m*，第 *j* 个销地 *Bj* 的销量为 *bj*，*j* = 1，2，…，*n*，从 *Ai* 到 *Bj* 的单位物资运价为 *cij*。问在产销平衡的条件下，如何确定总运费最小的物资调运方案。

设 *xij* 为从产地 *Ai* 到销地 *Bj* 的物资运输量，则上述问题可归结为一个线性规划问题。表 3-3 为各产地到各销地的单位运价，表 3-4 为各地的产量、销量和运输量分配。

表3.3 单位运价表

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	
A_1	c_{11}	c_{12}	$\cdots$	c_{1n}	
A_2	c_{21}	c_{22}	$\cdots$	c_{2n}	
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
A_m	c_{m1}	c_{m2}	$\cdots$	c_{mn}	

表3.4 产销平衡表

销地 / 产地	B_1	B_2	$\cdots$	B_n	a_i
A_1	x_{11}	x_{12}	$\cdots$	x_{1n}	a_1
A_2	x_{21}	x_{22}	$\cdots$	x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
A_m	x_{m1}	x_{m2}	$\cdots$	x_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	$\cdots$	b_n	

运输问题的数学模型为：

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$
\begin{aligned}
\text{s.t.}\quad & x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1\\
& x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2\\
& \ldots\ldots\\
& x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m\\
& x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1\\
& x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2\\
& \ldots\ldots\\
& x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n\\
& x_{ij}\geq 0,\ \forall\ i,j
\end{aligned}
$$

运输问题数学模型的代数和表达形式，

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1\sim m$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1\sim n$$

$$x_{ij}\ge 0,\ \forall\ i,j$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\right)$$

运输表可写成表 3-5 所示的单位运价表或表 3-6 所示的综合表两种形式，

表3.5 运输表（单位运价表）

销地 / 产地	B_1	B_2	⋯	B_n	a_i
A_1	c_{11}	c_{12}	⋯	c_{1n}	a_1
A_2	c_{21}	c_{22}	⋯	c_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1}	c_{m2}	⋯	c_{mn}	a_m
b_j	b_1	b_2	⋯	b_n	

表3.6 运输表(综合表)

c_{ij} (x_{ij})	B_1	B_2	⋯	B_n	a_i
A_1	c_{11} (x_{11})	c_{12} (x_{11})	⋯	c_{1n} (x_{1n})	a_1
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
A_m	c_{m1} (x_{m1})	c_{m2} (x_{m2})	⋯	c_{mn} (x_{mn})	a_m
b_j	b_1	b_2	⋯	b_n	

3.2 运输问题的解

因为$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j=Q$，所以产销平衡的运输问题一定存在可行解 $X_{ij}^{0}=a_ib_j/Q$，因有 $0\le x_{ij}\le \min\{a_i,b_j\}$，所以运输问题必存在最优解。若产销量 ai 和 bj 都是整数，还必存在整数最优解。

运输问题约束方程的系数矩阵如图，

$$\begin{array}{c}
\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{matrix} \\
\left.\left(\begin{matrix}
1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 & & & & & \\
 & & & & & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
1 & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
 & 1 & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & & & & \vdots & \\
 & & & 1 & & & & 1 & & & & & 1
\end{matrix}\right)\right\} \begin{matrix} m\text{行} \\ n\text{行} \end{matrix} \\
\begin{matrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} & P_{21} & P_{22} & \cdots & P_{2n} & \cdots & P_{m1} & P_{m2} & \cdots & P_{mn} \end{matrix}
\end{array}$$

前 m 行为前 m 个约束方程，对应运输表的 m 行，图中后 n 行是后 n 个约束方程，对应运输表的 n 列，Pij 为变量 xij 的系数列向量。

从系数矩阵可以看出运输问题的数学模型具有下列特征：

（1）方程组中所有变量的系数皆为 1 和 0 ；

（2）看每一列，任何一个变量 xij 在前 m 个方程中以系数 1 出现一次，在后 n 个方程也以系数 1 出现一次；

（3）由于要求 $\sum ai=\sum bj$，这 $(m+n)$ 个方程是线性相关的。如果从中去掉一个方程，剩下的 $(m+n-1)$ 个方程线性无关。也就是说，系数矩阵 A 的秩小于或等于 $m+n-1$ 。

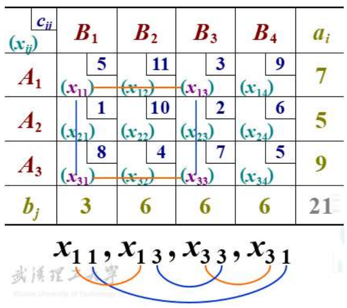
变量 xij 的系数可用列向量可表示成 $P_{ij}=ei+e_{m+j}$，每一列的元素只有第 i 行和第 m+j 行的元素为 1，其余都为 0。

同一般的线性规划问题一样，运输问题的最优解一定可以在基可行解中找到。因此，继考察了约束方程组的系数矩阵之后，还要进一步研究运输问题的基及其基变量所具有的特征。

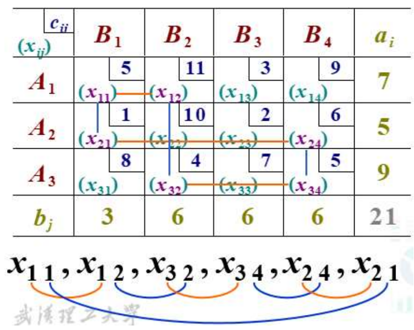
由上面的讨论可知，运输问题基变量的数目应该是 $m+n-1$ 个，接下来研究怎样的 $m+n-1$ 个变量 $X_{i1j1}, X_{i1j2}, X_{i2j3}, \cdots, X_{irjr}, X_{isjs}$ 可以组成基变量，或者说，怎样的 $m+n-1$ 个变量对应的系数列向量 $P_{i1j1}, P_{i1j2}, P_{i2j3}, \cdots, P_{isjs}$ 是线性无关的，其中（$s=m+n-1$）。下面引入有关闭回路的概念，它有助于分析和解决上述问题。

定义 3.1 凡是能排成 $x_{i1j1}, x_{i1j2}, x_{i2j3}, \cdots, x_{isjs}, x_{isj1}$ （$i_1, i_2, \cdots, i_s$ 互不相同，$j_1, j_2, \cdots, j_s$ 互不相同）形式的变量的集合称为一个闭回路。

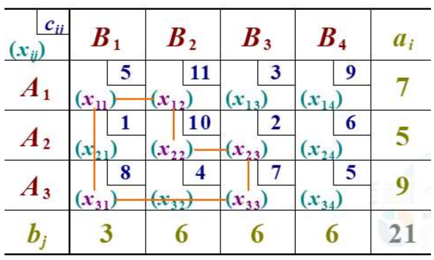
这个变量的集合我们用序号（3.1）表示，把出现在(3.1) 中的变量称为这个闭回路的顶点(或拐角点)，相邻两顶点的连线称为闭回路的边。如下图，x_{11}，x_{13}，x_{33}，x_{31} 组成了一个闭回路，是一个矩形。



下表中，x_{11}，x_{12}，x_{32}，x_{34}，x_{24}，x_{21} 也组成了一个闭回路，这个闭回路是一个闭合看似交叉的折线。



下表中，从 x_{11} 开始到 x_{12} 到 x_{22} 到 x_{23} 到 x_{33} 到 x_{31} 再回到起点 x_{11}，也组成了一个闭回路。



这个闭回路是一个多边形。可见，闭回路的表现形状多样。

从上面几个闭回路的例子中不难看出，如果把一个闭回路的所有顶点都在表上画出来，并且把相邻的顶点用一条直线连接起来，就可以得到一条封闭的折线，折线的每一条边要么是水平的，要么是垂直的，也就是说，折线是由交替的水平和垂直（联接的）线段组成。另外，在表中的每一行和每一列中，至多只有闭回

路的两个顶点；对一条闭回路是按顺时针方向还是逆时针方向是无关紧要的。

闭回路有两个性质。

性质 1：若有一闭回路 $X_{i1j1}, x_{i1j2}, x_{i2j3}, \cdots, x_{isjs}, x_{isj1}$,则 $P_{i1j1}-P_{i1j2}+P_{i2j3}-\cdots+P_{isjs}-P_{isj1}=0$。

性质 2：若变量组 $X_{i1j1}, X_{i1j2}, X_{i2j3}, \cdots, X_{irjr}, X_{isjs}$ 中有一部分组成闭回路，则变量组对应的系数列向量是线性相关的。**性质这里不证明。**

定义 3.2 设有变量组 $X_{i1j1}, X_{i1j2}, X_{i2j3}, \cdots, X_{irjr}, X_{isjs}$，若某一个变量是其所在行或列中出现的唯一变量，就称这个变量是一个关于变量组的孤立点。

性质 3.3 若一变量组不包含任何闭回路，则该变量组必有孤立点。但是，性质 3.3 的逆命题不成立。

定理 3.1：变量组 $X_{i1j1}, X_{i1j2}, X_{i2j3}, \cdots, X_{irjr}, X_{isjs}$ 对应的系数列向量组线性无关的充要条件是：变量组不包含有闭回路。

推论 3.1：$m+n-1$ 个变量构成基变量的充要条件是不含闭回路，其中($s=m+n-1$)。

3.3 表上作业法

表上作业法是直接在运价表上求最优解的一种方法，其实质仍是单纯形法；因为所有计算可以在运输表上操作，所以叫做表上作业法。其使用的条件是：目标函数求最小值、产销平衡和运价非负。

表上作业法的求解步骤是：

第一步，用最小元素法、左上角法、元素差额法 求初始基可行解（初始调运方案）；

第二步，用闭回路法或位势法求检验数，并判断是否得到最优解。当非基变量的检验数 σ_{ij} 全都非负时得到最优解，计算停止；若存在检验数 $\sigma_{ij}<0$，说明还没有达到最优，转第三步；

第三步，调整运量，即换基，选一个变量出基，对原运量进行调整得到新的基可行解，转入第二步。

3.3.1 初始解的求解

1. **最小元素法**

最小元素法的基本思想是就近供应，这是因为运输问题是要确定总运费最小的运输方案；每次从运价表中选择当前最小运价的格子分配相应的运输量，由此确定初始运输方案；最小元素法求得的初始解一般很接近最优解。

例 3.1 用最小元素法求下列运输问题的初始解。

c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	11	3	9	6
A_2	1	10	2	6	2
A_3	8	4	7	5	5
	1	4	3	6	

解：

第一轮，发现运价表中最小运价为 1，处在第二行第一列即 A2B1 格，观察供需关系，A2 可提供 5 吨的产量，B1 只需 3 吨的销量，所以 B1 需要的 3 吨可全部由 A1 调运；B1 的销量满足了，为方便后续分析，划掉 B1 列；

第二轮，剩下的运价表中当前最小运价为 2，处在 A2B3 格，观察供需关系，B1 需 6 吨的销量，而 A2 只能提供 5-3=2 吨的产量，所以可把 A2 剩下的 2 吨都调运给 B3，划掉 A2 行；

第三轮，剩下的运价表中当前运价最小为 3，处在 A1B3 格，观察供需关系，A1 能提供 7 吨的产量，而 B3 只需 6-2=4 吨的销量所以 B3 需要的 4 吨可全部由 A1 调运，划掉 B3 列；

后面过程不一一详述，最终结果为：

(x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1			(4)	(3)	7
A_2	(3)		(2)		5
A_3		(6)		(3)	9
b_j	3	6	6	6	$z_0=85$

2. 左上角法（西北角法）

左上角法的要点是按产地和销地的排序从前到后依次确定供销关系，即每次都是在运价表中选择当前处在左上角的格子分配运输量，由此确定初始运输方案；该法不依赖运价表，可直接在产销平衡表上操作，计算量较小，但求得的初始解远不如最小元素法的好，通常与最优解相去甚远。

例 3.2：采用左上角求例 3.1 的初始解。

解：第一步，运价表最左上角的格子为第一行第一列，即 A1B1 格，观察供需关系，A1 可提供 7 吨的产量，B1 只需要 3 吨的销量，所以 B1 需要的 3 吨全部由 A1 调运，因为 B1 的需要满足了，为方便计，划掉 B1 列（或在 B1 列剩下的格子里打×）；

第二步，目前运价表最左上角的格子为 A1B2 格，B2 需要 6 吨的销量，A1 只能提供 7-3=4 吨的产量，所以把 A1 剩下的 4 吨都调运给 B1，在 A1 行剩下的格子里打×；

后面过程不一一详述，左上角求得的初始解见下表，

(x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	(3)	(4)	×	×	7
A_2	×	(2)	(3)	×	5
A_3	×	×	(3)	(6)	9
b_j	3	6	6	6	$z_0=135$

3. 伏格尔法

伏格尔法的出发点与最小元素法相同。由于最小元素法只考虑了局部运输费用最小，对整个产销系统的总运输费用来说可能离最优值较远，有时为了节省一处的费用会造成别处要多花几倍的运费。伏格尔法对最小元素法进行了改进，考虑到产地到销地的最小运价和次最小运价之间的差额，如果差额很大，就选最小运价处先调运，否则会增加总运费。相比之下，伏格尔法是一种“顾全大局” 的最小元素法，也称元素差额法。伏格尔法求得的初始解更接近或者就是最优解。

伏格尔法的求解步骤如下：

1）从运价表中分别计算出各行和各列的最小运费和次最小运费的差额，并填入该表的最右列和最下行。

2）再从差值最大的行或列中找出最小运价确定供需关系和供需数量。当产地或销地中有一方数量供应完毕或得到满足时，划去运价表中对应的行或列。

3）重复 第 1）步和第 2)步，直到找出初始解为止。

例 3.3 用伏格尔法求下面运输问题的初始解。

c_{ij} / (x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	9	10	7	9
A_2	1	3	4	2	5
A_3	8	4	2	5	7
b_j	3	8	4	6	21

解：第一轮，求出每行和每列的次最小运价和最小运价之差，第一行行差额为 7- 2=5，第二行行差额为 2- 1=1，第三行行差额为 4 - 2=2；第一列的列差额为 2- 1=1，第二列列差额为 4- 3=1，第三列列差额为 4 - 2=2，第四列列差额为 5- 2=3；在所有行、列差额中，第一行行差额 5 最大，对应第一行里的最小运价为 2，位于 A1B1 格，所以首先给 A1B1 格分配运输量；观察供需关系，A1 可提供 9 吨的产量，B1 只需要 3 吨的销量，所以 B1 需要的 3 吨全部可由 A1 调运，划掉 B1 列；

后面每一轮都的计算方法相同，不一一详述，最后计算结果为，

c_{ij} / (x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i	行差额			
A_1	2 (3)	9 (5)	10	7 (1)	9	5	2	2	2
A_2	1	3	4	2 (5)	5	1	1	-	
A_3	8	4 (3)	2 (4)	5	7	2	2	2	1
b_j	3	8	4	6	21				
列差额	1	1	2	3		$z^1=88$			
	-	1	2	3					
		5	8	2					
		5	-	2					

此题的最优目标函数值 z*=83，最小元素法求得初始解的目标函数值为 100，可以看出，伏格尔法求得的初始解对应的目标函数值很接近最优解。

3.3.2 检验数的求解

求得了初始解以后，下一步工作是进行当前解的判别。当前解的判别仍然是依据非基变量的检验数，检验数的计算公式为

$$\sigma_{ij}= c_{ij} - C_B B^{-1} P_{ij}, \quad i,j \in N$$

因为运输问题的目标函数是要求实现最小化，所以如果满足条件 $\sigma_{ij} \geq 0$，$i, j \in N$， 当前解就是最优解。

下面介绍两种求非基变量检验数的方法：闭回路法和位势法。

1. 闭回路法求检验数

运输表中的每个格子都对应着一个变量，为了在表上能够看出哪些变量是基变量、哪些变量是非基变量，可以约定：在选为基变量的格子中打一个括号，把基变量的值填在这个括号里，这种格子叫数字格；非基变量的值都为 0，但这个 0 不用填，这样就把非基变量对应的格子称为空格(也有的教材打叉号表示)。

(x_{ij}) c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5	11	3 (4)	9 (3)	7
A_2	1 (3)	10	2 (2)	6	5
A_3	8	4 (6)	7	5 (3)	9
b_j	3	6	6	6	z_0=85

约定：非基变量（空格） 基变量（数字格）

如图中，打括号的数字格表示基变量，有六个基变量，x13=4、x14=3，x21=3，x23=2，x32=6，x34=3，其余空格为非基变量。

非基变量和闭回路的关系有如下定理，

定理 6.3 设运输问题的基变量组为 $X_{i1j1}, X_{i1j2}, X_{i2j3}$, …, X_{irjr}, X_{isjs}, s=m+m-1, x_{lk} 是一个非基变量，那么基变量组加上这个非基变量组成的新变量组中存在一个包含这个非基变量 x_{lk} 的闭回路，并且这个闭回路是唯一的。

例如，下面这个运输表中，基变量组为打了小括号的数字格 x13 ， x14 ， x21 ， x23 ， x32 ， x34;，加入非基变量 x11 后，新变量组是否包含闭回路？

(x_{ij}) c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 x_{11}	11	3 (4)	9 (3)	7
A_2	1 (3)	10	2 (2)	6	5
A_3	8	4 (6)	7	5 (3)	9
b_j	3	6	6	6	z_0=85

通过寻找可以发现，有且仅有一个闭回路，为 x11 ， x21 ， x23 ， x13。

用闭回路法求某一非基变量的检验数的具体步骤为：

（1）在初始产销平衡表上，从每一空格（非基变量）出发找一条闭回路：以此空格为起点，用水平或垂直线向前画，碰到一打括号的数字格（也就是基变量）转 90°（有些情况下也可以不改变方向)，然后继续前进，直到回到起始空格为止。

（2）在闭回路上，由起点（空格）开始，分别在奇数顶点上标上正号，在偶数顶点上标上负号，各顶点以这些符号分别乘以相应的运价，其代数和就是这个非基变量的检验数。然后填入检验数表。

例如求下表中空格，也就是非基变量 x_{24} 的检验数 σ_{24} 。

$(x_{ij})\sigma_{ij}$ c_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 3	11	(+) 3 (4)	(-) 9 (3)	7
A_2	1 (3)	10	(-) 2 (2)	6 (+) (x_{24})	5
A_3	8	4 (6)	7	5 (3)	9
b_j	3	6	6	6	z_0=85

以 x24 为起点，以基变量为其他顶点组成的闭回路为 x24 ， x23 ， x13 ， x14，再回到 x24。从顶点 x24 开始，奇数号顶点 x24 和 x13 标上（+）号，偶数号顶点 x23 和 x14 标上负号。用每个顶点的正负符号乘以对应的运价再求和，就是检验数，即 σ 24 =c24-c23+c13-c14=6-2+3-9=-2。所以，非基变量的检验数是其所在闭回路上奇偶顶点单位运价的正负代数和。因此，检验数的经济意义是单位运输量的增减导致总运费的改变量。所有非基变量的闭回路和检验数计算结果列在运输表中。

c_{ij} / (x_{ij}) σ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 / 3	11 / 3	3 / (4)	9 / (3)	7
A_2	1 / (3)	10 / 3	2 / (2)	6 / -2	5
A_3	8 / 10	4 / (6)	7 / 8	5 / (3)	9
b_j	3	6	6	6	21

(i, j)	闭　回　路	σ_{ij}
(1,1)	(1,1)-(1,3)-(2,3)-(2,1)-(1,1)	σ_{11}=5-3+2-1=3
(1,2)	(1,2)-(1,4)-(3,4)-(3,2)-(1,2)	σ_{12}=11-9+5-4=3
(2,2)	(2,2)-(2,3)-(1,3)-(1,4)-(3,4)-(3,2)-(2,2)	σ_{22}=10-2+3-9+5-4=3
(2,4)	(2,4)-(2,3)-(1,3)-(1,4)-(2,4)	σ_{24}=6-2+3-9= -2
(3,1)	(3,1)-(3,4)-(1,4)-(1,3)-(2,3)-(2,1)-(3,1)	σ_{31}=8-5+9-3+2-1=10
(3,3)	(3,3)-(3,4)-(1,4)-(1,3)-(3,3)	σ_{33}=7-5+9-3=8

2. 位势法求检验数

当运输问题的产地和销地很多时，空格的数目很大，采用位势法计算检验数更为简便。位势法求检验数是根据对偶理论推导出来的一种方法。

引入 m + n 个待定的未知量 u1, u2 ,···, um , v1, v2 ,···, vn，把 ui 写在运输表各行 Ai 的右边，把 vj 写在各列 Bj 的下边，按下述公式计算检验数的方法称为位势法：

1）σij=Cij-（Ui+Vj）计算位势 Ui 、Vj ，因对基变量而言有σij=0，即 Ui+Vj =Cij ，令 U1=0;

2）再由σij=Cij-（Ui+Vj）计算非基变量的检验数σij。

例 3.6 用位势法求解上述运输问题的检验数。

解：如图，引入 m+n=3+4=7 个未知数，

c_{ij} / (x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	u_i
A_1	5	11	3 / (4)	9 / (3)	u_1
A_2	1 / (3)	10	2 / (2)	6	u_2
A_3	8	4 / (6)	7	5 / (3)	u_3
v_j	v_1	v_2	v_3	v_4	z_0=85

表中一共有 6 个基变量 $x13$, $x14$, $x21$, $x23$, $x32$, $x34$，根据基变量检验数=0，即（Ui+Vj）=Cij，有：

$u_1+ v_3 = 3 = c_{13}$， $u_1+ v_4 = 9 = c_{14}$

$u_2+ v_1 = 1 = c_{21}$， $u_2+ v_3 = 2 = c_{23}$

$u_3+ v_2 = 4 = c_{32}$， $u_3+ v_4 = 5 = c_{34}$

令 u2=0，增加一个方程，现在一共有 7 个方程，7 个未知数，然后求解方程组，求得各位势的值 u1,2,3=1,0，-3，v1,2,3,4=1,7,2,8。

非基变量的检验数为$\sigma_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$，所以 σ_{11} =3，σ_{12} =3， σ_{22} =3， σ_{24} =-2，σ_{31} =3， σ_{33} =8。

3. 当前解的调整

因为运输问题的目标函数是求最小，在计算表中如果所有的检验数都大于或等于零，则表明对当前解作出任何改变都不会使运费下降，所以当前解就是最优解。反之，说明当前解不是最优解，需要加以调整。

当前解的调整是在闭回路上进行。具体步骤为：

1）确定一个进基变量：选择一个负检验数（当不止一个负检验数时，一般选一个最小的负检验数 ）$\sigma lk \leq 0$ ，以它对应的非基变量 xpq 作为换入变量；

2）确定出基变量：找出换入变量对应的闭回路，将闭回路的顶点按顺序编号，换入变

量 *xlk* 作为第一个顶点（或标正号），在所有偶数号（或标负号）顶点中找出运输量最小的顶点， 假设是 *xrs,* 作为换出变量；

3）将换出变量 *xrs* 的运输量 作为 调整量 θ ，对当前解调整如下：

（1）闭回路中所有奇数号顶点(或标正号的变量)的运输量加上 θ；

（2）闭回路中所有偶数号顶点(或标负号的变量)的运输量减去 θ；

（3）不属于闭回路的变量对应的运输量不变。

这样得到一组新的可行解，然后求所有非基变量的检验数重新判断。

刚才求得的表中，非基变量 *x24 的*检验数小于零，说明当前解不是最优解，需要进行调整。以非基变量 *x24* 为换入变量，找到他对应的闭回路为：{ *x*24 , *x*23 , *x*13 , *x*14 }，调整量从偶数号顶点 *x*23, *x*14 中找运输量最小的是 *x*23，运输量为 2，所以调整量 θ *为 2,* 换出变量为 *x*23。对闭回路上的奇数号顶点 *x*24 , *x*13 的 运输量加上 θ*,* 偶数号顶点 *x*23, *x*14 的运输量减去 θ*,* 其余格子的运输量保持不变。调整后得到一个新的可行解，新解的目标函数值 z1=81，比上一个解的目标函数值 z0=85 要小。

c_{ij} / (x_{ij}) σ_{ij}	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	5 / 1	11 / 3	3 / (6)	9 / (1)	7
A_2	1 / (3)	10 / 5	2 / 2	6 / (2)	5
A_3	8 / 8	4 / (6)	7 / 8	5 / (3)	9
b_j	3	6	6	6	21

(i,j)	闭 回 路	σ_{ij}
(1,1)	(1,1)-(1,4)-(2,4)-(2,1)-(1,1)	σ_{11}= 5 -9+6-1=1
(1,2)	(1,2)-(1,4)-(3,4)-(3,2)-(1,2)	σ_{12}=11-9+5-4=3
(2,2)	(2,2)-(2,4)-(3,4)-(3,2)-(2,2)	σ_{22}=10-6+5-4=5
(2,3)	(2,3)-(2,4)-(1,4)-(1,3)-(2,3)	σ_{23}= 2 -6+9-3=2
(3,1)	(3,1)-(3,4)-(2,4)-(2,1)-(3,1)	σ_{31}= 8 -5+6-1=8
(3,3)	(3,3)-(3,4)-(1,4)-(1,3)-(3,3)	σ_{33}= 7 -5+9-3=8

接着计算这个新解的所有非基变量的检验数，发现均大于零，所以当前解是最优解。

3.4 产销不平衡问题

当总产量与总销量不相等时，称为不平衡运输问题。这类运输问题在实际中常常碰到，其求解方法是将不平衡运输问题化为平衡问题求解。

产大于销的运输问题

首先来看 产大于销的运输问题，即 ai 之和 大于 bj 之和。其数学模型 与 产销平衡模型不同之处在于 约束条件有改变，(动画)一是 xij 之和小于等于 ai，二是增加了 ai 之和 大于 bj 之和。

通过增加虚拟的销地可以把产大于销问题转化为产销平衡问题。假设增加一个虚拟的销地 Bn+1，它的销量为多出的产量，设 xi n+1 （ i = 1~m ） 为从产地 Ai 到虚拟销地 Bn+1 的物资运输量，其相应运价 ci n+1= 0 （ i = 1 ~ m ），原问题可转化为平衡问题。转化后的数学模型为，

$$\min z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} + x_{i\,n+1} = a_i \text{ , } i = 1 \sim m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \text{ , } j = 1 \sim n$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{i\,n+1} = b_{n+1}$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ , } \forall\ i, j$$

具体求解时，在运价表右端增加一列 Bn+1，运价为零， 销量为 bn+1。整理后的

最终数学模型如下，

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n+1}c_{ij}x_{ij}$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n+1}x_{ij}=a_i,\ i=1\sim m$$
$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j,\ j=1\sim n+1$$
$$x_{ij}\geq 0,\ \forall\ i,j$$

例 3.7 将下面产销不平衡运输问题化为产销平衡问题。

c_{ij} (x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	2	11	3	4	7
A_2	10	3	5	9	5
A_3	7	8	1	2	7
b_j	2	3	4	6	

解：产量 ai 之和为 7+5+7=19，销量 bj 之和为 2+3+4+6=15，产大于销，因此，虚拟一个销地 B5，即在运价表右端增加一列 B5，销量为 19-15=4,，
Ai 到 B5 的单位运价为 0，就转化成了产销平衡问题，然后运用前面讲的表上作业法进行求解。

c_{ij} (x_{ij})	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
A_1	2	11	3	4	0	7
A_2	10	3	5	9	0	5
A_3	7	8	1	2	0	7
b_j	2	3	4	6	4	

销大于产问题

对于销大于产问题，可以通过增加虚拟的产地来解决。假设有一个虚拟的产地 Am+1，它的产量为多出来的销量，设 Xm+1 j（ j = 1 ~ n ）为从虚拟产地 Am+1 到销地 Bj 的物资缺货量，相应单位运价 cm+1 j = 0 （ j = 1 ~ n ），原问题可转化为平衡问题。转化后的数学模型如下，具体计算时，在运价表的下方增加一行 Am+1，运价 C（m+1）j 为零，产量为 am+1 即可。

$$\min z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i,\ i=1\sim m$$
$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\leq b_j,\ j=1\sim n$$
$$x_{ij}\geq 0,\ \forall\ i,j$$
$$\left(\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j\right)$$

3. **超产超销问题、产销布局问题**

对于超产超销问题，需要既增加虚拟的产地，又要增加虚拟的销地，转化为产销平衡问题来解决。对于产销布局问题，产量和销量有上下限，需要分别处理，下面以一个具体例子来看怎么处理。

例 3.8 设有三个化肥厂（A、B、C）供应四个地区（I、II、III、IV）的农用化

肥。各化肥厂年产量、各地区的需求量、单位化肥的运价如表 3.4.1 所示。求运费最省的调拨方案。

产地 \ 销地	I	II	III	IV	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	-	50
最低需求	30	70	0	10	
最高需求	50	70	30	不限	

解： 这个问题，特别之处在于三个销地中每个销地都有一个最低需求和最高需求，即 bj 有上下界，并且 b4 没有上限，这个需要进行特殊处理。

总产量 = 50 + 60 + 50 = 160 万吨 ，最低需求量为 30 + 70 + 0 + 10 = 110 万吨，最高需求量为无限。因为销地 IV 最多能分配到的化肥数量 = 总产量 160 – I 地区最低需求量 30 – II 地区最低需求量 70 – III 地区最低需求量 0 = 60 万吨 ，所以 IV 地最多能分配到 60 万吨化肥。也就是说， IV 地的最高需求为 60 万吨，从而运输问题可以变为下面这个新的运输表 3.4.2，表中销地 4 的销量为 60 吨。

表3.4.2

产地 \ 销地	I	II	III	IV	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	-	50
最高需求	50	70	30	60	

现在这个问题变成了一个产销不平衡问题，需求量 50+70+30+60=210 ＞ 产量 50+60+50=160，故需增加虚拟产地 D ，产量为 50 万吨，但从 D 到各销地的运价应该是多少？

表3.4.3

产地 \ 销地	I	II	III	IV	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	-	50
D	?	?	?	?	50
最高需求	50	70	30	60	

运价显然不应是零了，各地区的需求量包括最高需求和最低需求两部分，将需求地分开处理，可由虚拟产地 D 调运的，令单位运价=0，不能由虚拟产地 D 调运的，令相应运价为任意大正数 M。

把地区 I 分成地区 I‘和地区 I“两部分，见表 3.4.4，地区 I‘的 30 万吨，不能由虚拟产地 D 调运，所以单位运价设为 M；地区 I“只用销售 20 万吨，不是必要需求 ，可以由虚拟产地 D 调运，设其单位运价为 0； 其他三个地区的需求量可以进行同样的处理。从而建立新的运输平衡表 3.4.5，D 这一栏为虚拟增加的产地。

表3.4.4

地区I		地区II		地区III		地区IV	
I′	I″	II′	II″	III′	III″	IV′	IV″
30	20	70	0	0	30	10	50
不能由*D*调运	可以由*D*调运	不能由*D*调运	可以由*D*调运	不能由*D*调运	可以由*D*调运	不能由*D*调运	可以由*D*调运
运价*M*	运价0	运价*M*	运价0	运价*M*	运价0	运价*M*	运价0
50		70		30		60	

表3.4.5

销地/产地	I′	I″	II	III	IV′	IV″	产量
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	*M*	*M*	50
D	*M*	0	*M*	0	*M*	0	50
最高需求	30	20	70	30	10	50	

利用表上作业法可以求得问题的最优解如表 3.4.6。

表3.4.6

销地/产地	I′	I″	II	III	IV′	IV″	产量
A	16	16	13 / 50	22	17	17	50
B	14	14	13 / 20	19	15 / 10	15 / 30	60
C	19 / 30	19 / 20	20 / 0	23	*M*	*M*	50
D	*M*	0	*M*	0 / 30	*M*	0 / 20	50
最高需求	30	20	70	30	10	50	