

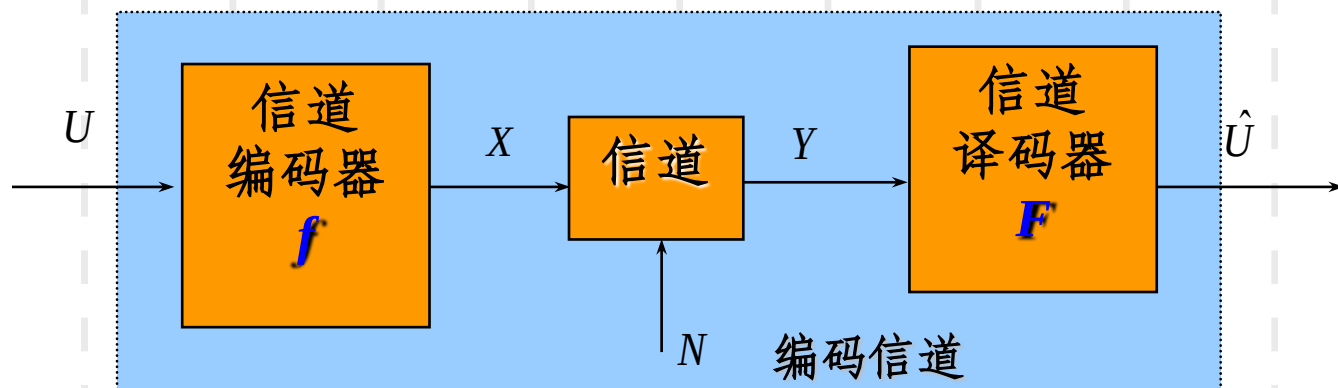
第5章 有噪信道编码

——差错控制编码



问题的提出

- 每一个通信系统都会有两方面技术要求：有效性和可靠性
 - (1) 有效性：信息率，信息速率，含量效率
 - (2) 可靠性：差错率 P_e 。 P_e 与信道的统计特性有关。
- 降低 P_e 的方法：先对消息进行编码再送入信道传送，这种为降低平均差错率而进行的编码称为信道编码；在信道输出端加信道译码器进行信息还原。
- 香农第二编码定理告诉我们：只要信道编码和译码的方法得当，就可使平均差错率趋于零。



各节内容



5.1 译码规则与错误概率

5.2 两种典型的译码规则

5.3 平均差错率与信道编码

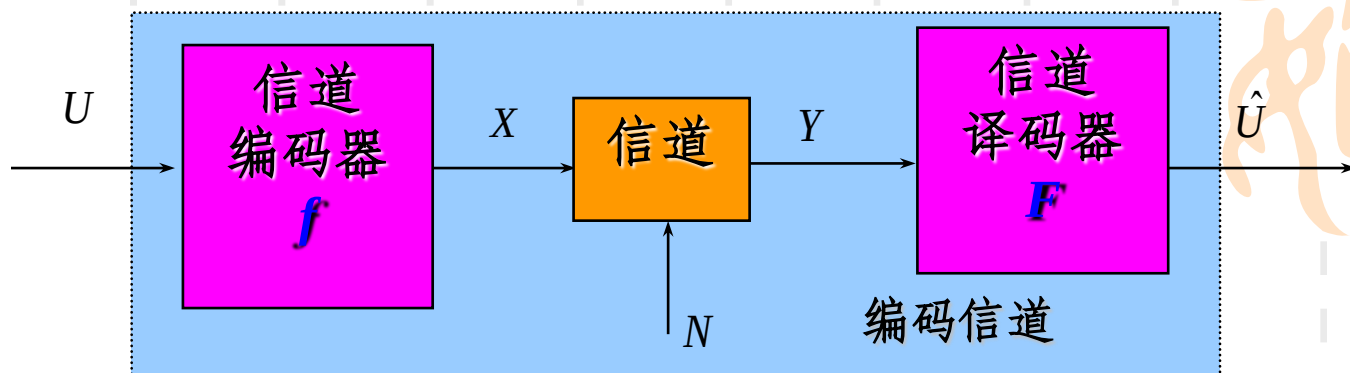
5.4 汉明距离

5.5 有噪信道编码定理与逆定理

5.6 线性分组码



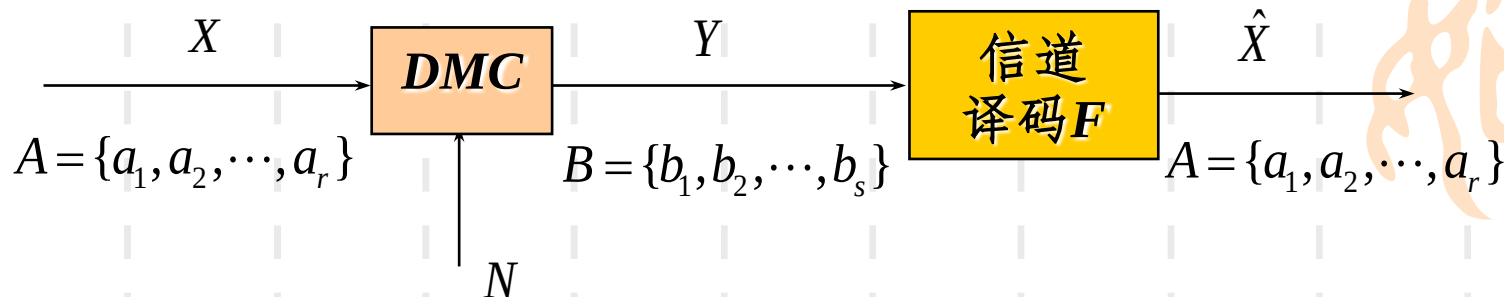
5.1 译码规则与错误概率



- 信道编码是一个一一对应的变换或函数，称为**编码函数 f** ；
- 信道译码也是一个函数，称为**译码函数 F** 。

由于编码 **f** ($U \mapsto X$) 是一一对应变换，其反变换 **f^{-1}** 唯一确定。因此，讨论译码函数 **F** 时，只考虑从 **Y** 中还原出 **X** 就可以了，无需还原出 **U** 。

1、译码规则



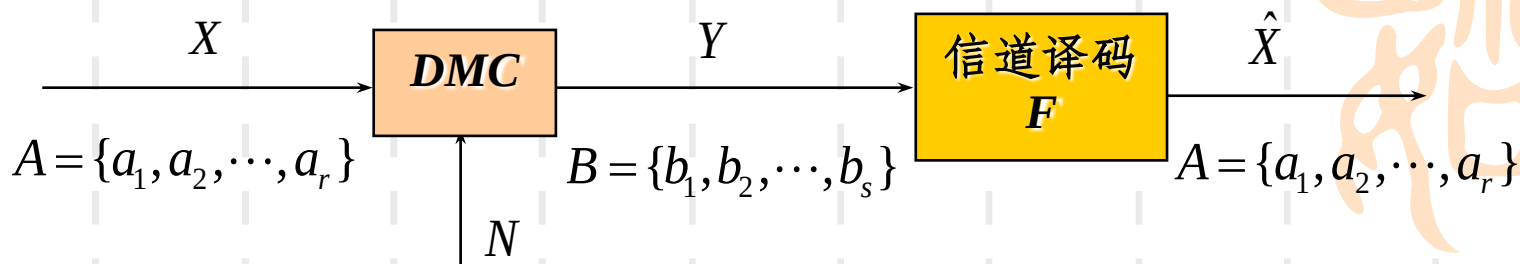
信道译码函数 F ，又称译码规则，是从信道输出符号集合 B 到信道输入符号集合 A 的映射：

$$F : B \rightarrow A$$

$$F(b_j) = a_j^* \in A, \quad j = 1, 2, \dots, s$$

- 译码规则是由人为制订的；
- 对于同一个信道可制订出多种译码规则；
- “好”的译码规则：平均差错率小。

2、错误概率



译码规则: $F(b_j) = a_j^* \in A, \quad j = 1, 2, \dots, s$

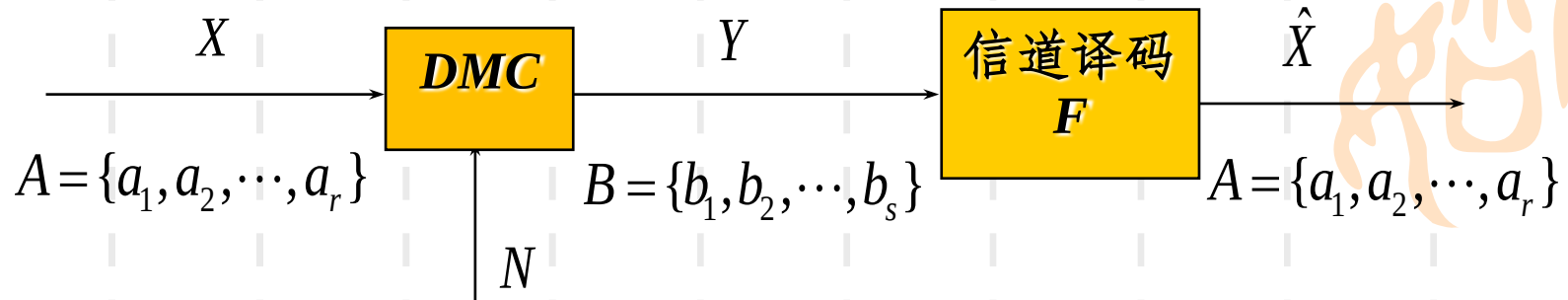
b_j 的译码正确概率是后验概率: $P(X = a_j^* | Y = b_j) = P[F(b_j) | b_j]$

b_j 的译码错误概率: $P(e | b_j) = P[X \neq F(b_j) | Y = b_j] = 1 - P[F(b_j) | b_j]$

平均差错率 P_e : $P_e = \sum_{j=1}^s P(b_j) P(e | b_j) = \sum_{j=1}^s P(b_j) \{1 - P[F(b_j) | b_j]\}$

平均差错率 P_e 与译码规则 F 有关。

平均差错率 P_e 的计算公式



译码规则: $F(b_j) = a_j^* \in A, \quad j = 1, 2, \dots, s$

平均差错率 P_e : $P_e = \sum_{j=1}^s P(b_j) P(e | b_j) = \sum_{j=1}^s P(b_j) \{1 - P[F(b_j) | b_j]\}$

换一种表达式: $P_e = 1 - \sum_{j=1}^s P[F(b_j), b_j] = 1 - \sum_{j=1}^s P[F(b_j)] P[b_j | F(b_j)]$

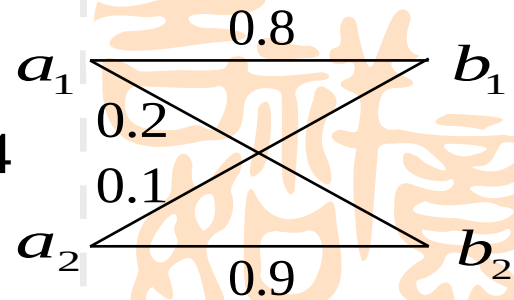
或者 $P_e = \sum_{Y, X=a^*} P(a_i, b_j) = \sum_{Y, X=a^*} P(a_i) P(b_j | a_i)$

当输入等概时: $P_e = 1 - \frac{1}{r} \sum_{j=1}^s P[b_j | F(b_j)] = \frac{1}{r} \sum_{Y, X=a^*} P(b_j | a_i)$

例：译码规则与平均差错率

(1) 找出所有可能的译码规则;

(2) 求出各个译码规则对应的平均差错率。



4种译码规则:

$$F_1 : \begin{cases} F_1(b_1) = a_1 \\ F_1(b_2) = a_1 \end{cases}$$

$$F_2 : \begin{cases} F_2(b_1) = a_2 \\ F_2(b_2) = a_2 \end{cases}$$

$$F_3 : \begin{cases} F_3(b_1) = a_1 \\ F_3(b_2) = a_2 \end{cases}$$

$$F_4 : \begin{cases} F_4(b_1) = a_2 \\ F_4(b_2) = a_1 \end{cases}$$

$$[P_X] = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$[P_{Y|X}] = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$$

$$[P_{XY}] = \begin{bmatrix} 0.32 & 0.08 \\ 0.06 & 0.54 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix}$$

$$P_e(F_1) = 1 - \sum_{j=1}^s P[F_1(b_j), b_j] = 1 - [P(a_1, b_1) + P(a_1, b_2)] = 1 - (0.32 + 0.08) = 0.6$$

$$P_e(F_2) = 1 - \sum_{j=1}^s P[F_2(b_j), b_j] = 1 - [P(a_2, b_1) + P(a_2, b_2)] = 1 - (0.06 + 0.54) = 0.4$$

$$P_e(F_3) = 1 - \sum_{j=1}^s P[F_3(b_j), b_j] = 1 - [P(a_1, b_1) + P(a_2, b_2)] = 1 - (0.32 + 0.54) = 0.14$$

$$P_e(F_4) = 1 - \sum_{j=1}^s P[F_4(b_j), b_j] = 1 - [P(a_2, b_1) + P(a_1, b_2)] = 1 - (0.08 + 0.06) = 0.86$$

F_3 最好

F_4 最差